Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ. ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано УМО вузов Республики Беларусь по образованию
в области информатики и радиоэлектроники
в качестве учебно-методического пособия для студентов учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования по специальности
«Искусственный интеллект»*

Минск БГУИР 2011

Библиотека БГУИР

УДК 004.832.3(076.5)
ББК 32.813я7
Л69

А в т о р ы:
В. В. Голенков, В. П. Ивашенко, Д. Г. Колб, К. А. Уваров

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра информационно-вычислительных систем учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь»,
заместитель заведующего кафедрой интеллектуальных систем учреждения образования «Белорусский государственный университет»,
кандидат технических наук, доцент
В. С. Садов

Л69 **Логические** основы интеллектуальных систем. Практикум : учеб.-метод. пособие / В. В. Голенков [и др.]. – Минск : БГУИР, 2011. – 70 с. : ил.
ISBN 978-985-488-487-5.

Практикум по логическим основам интеллектуальных систем содержит теоретические сведения по основам классической, прикладной и нечёткой логики, необходимые для выполнения практических и лабораторных занятий, три лабораторные работы, упражнения, задания и решения.

Предназначен для студентов, обучающихся по специальности «Искусственный интеллект». Будет полезен студентам математических и инженерно-технических специальностей.

УДК 004.832.3(076.5)
ББК 32.813я7

ISBN 978-985-488-487-5

© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2011

Библиотека БГУИР

Содержание

Библиотека БГУИР

Перечень условных обозначений

$\perp$	– логическая константа «ложь»
$\top$	– логическая константа «истина»
$\varnothing$	– пустое множество
$\{\chi \| \alpha\}$	– неупорядоченное (неориентированное) множество всех тех и только тех элементов χ, для которых верно α
$\{\chi 1, \ldots \chi n\}$	– неупорядоченное (неориентированное) множество из $n > 0$ элементов
$\langle \chi 1, \chi 2, \ldots \chi n \rangle$	– упорядоченное (ориентированное) множество из $n > 1$ элементов
$[\alpha, \beta]$	– множество действительных чисел с числа α по число β
A^B	– множество всех возможных функций, полностью определенных на множестве B и принимающих значения из множества A
$\alpha(\chi 1, \ldots \chi n)$	– значение соответствия α при значениях аргументов $\chi 1, \ldots \chi n$
$\cup$	– операция объединения множеств
$\circ$	– операция композиции соответствий
$\langle \alpha \rangle$	– лексическая переменная α
$\|$	– разделитель альтернатив в лексическом выражении
$[\alpha]$	– обозначение необязательного лексического выражения α
$[\{\alpha\}]$	– обозначение необязательного многократного повторения лексического выражения α
::=	– обозначение определения лексической переменной, записанной от него слева, через выражение, записанное справа
:=	– обозначение присваивания переменной значения выражения

Библиотека БГУИР

Введение

Логика – наука, предметом изучения которой являются общие схемы верного человеческого мышления. Математическая логика – часть логики, использующая математические методы и модели для изучения предмета логики. Математическая логика изучает логические формы мышления и такие понятия, как истина и ложь, с помощью логических констант, логических переменных, логических связок, логических функций и операций. В математической логике выделяют классическую логику, которая включает логику предикатов и логику высказываний – упрощение, частный случай логики предикатов. Другие модели математической логики имеют название неклассических логических моделей. Являясь основой символьно-логического подхода, одного из главных в искусственном интеллекте наравне с нейро-бионическим, математическая логика также совмещает такие различные подходы, как содержательно-алгебраический и формальный. Однако, как можно выявить, противопоставление этих подходов зачастую условное и относительное. Поскольку логические принципы, которые исследуются математической логикой, являются не только основой человеческого и, в частности, строгого математического мышления, но и архитектурным базисом подавляющей части современных вычислительных систем, все результаты, расчёты на этих системах получены благодаря логике. В силу этого данная дисциплина является одной из фундаментальных в науке, и этим обосновывается её постоянная актуальность.

Практикум включает практические задания и задания по лабораторным работам. Примеры решённых заданий, приведённые в тексте, содержат: само задание, содержащее описание исходных данных и описание цели задания; решение, которое состоит из описания промежуточных состояний, ведущих к достижению описанной цели; ответ, который описывает правильный результат, соответствующий и удовлетворяющий поставленной в задании цели.

Библиотека БГУИР

Логика высказываний

Язык логики высказываний является формальным языком. Этот язык будем далее обозначать языком $\mathbb{L}$. Зададим этот язык с помощью метаязыка. Вначале введём лексемы для символов, принадлежащих различным классам алфавита языка $\mathbb{L}$, т. е. опишем его алфавит.

$\langle \text{константа} \rangle ::= \perp | \top$

$\langle \text{ненулевая цифра} \rangle ::= 1\,|\,2\,|\,3\,|\,4\,|\,5\,|\,6\,|\,7\,|\,8\,|\,9$

$\langle \text{цифра} \rangle ::= 0\,|\,\langle \text{ненулевая цифра} \rangle$

$\langle \text{натуральное} \rangle ::= \langle \text{ненулевая цифра} \rangle \left[\{ \langle \text{цифра} \rangle \} \right]$

$\langle \text{символ} \rangle ::= A\,|\,B\,|\,C\,|\,D\,|\,E\,|\,F\,|\,G\,|\,H\,|\,I\,|\,J\,|\,K\,|\,L\,|\,M\,|\,N\,|\,O\,|\,P\,|\,Q\,|\,R\,|\,S\,|\,T\,|\,U\,|\,V\,|\,W\,|\,X\,|\,Y\,|\,Z$

$\langle \text{импликация} \rangle ::= \to$

$\langle \text{конъюнкция} \rangle ::= \wedge$

$\langle \text{дизъюнкция} \rangle ::= \vee$

$\langle \text{отрицание} \rangle ::= \neg$

$\langle \text{эквиваленция} \rangle ::= \sim$

$\langle \text{унарная связка} \rangle ::= \langle \text{отрицание} \rangle$

$\langle \text{бинарная связка} \rangle ::= \langle \text{импликация} \rangle\,|\,\langle \text{конъюнкция} \rangle\,|\,\langle \text{дизъюнкция} \rangle\,|\,\langle \text{эквиваленция} \rangle$

$\langle \text{левая скобка} \rangle ::=)$

$\langle \text{правая скобка} \rangle ::= ($

Следующая грамматика описывает синтаксис языка $\mathbb{L}$.

$\langle \text{атомарная формула} \rangle ::= \langle \text{символ} \rangle \left[\{ \langle \text{натуральное} \rangle \} \right]$

$\langle \text{формула} \rangle ::= \langle \text{константа} \rangle\,|\,\langle \text{атомарная формула} \rangle\,|\,\langle \text{унарная сложная формула} \rangle\,|\,\langle \text{бинарная сложная формула} \rangle$

$\langle \text{унарная сложная формула} \rangle ::= \langle \text{левая скобка} \rangle \langle \text{унарная связка} \rangle \langle \text{формула} \rangle \langle \text{правая скобка} \rangle$

$\langle \text{бинарная формула} \rangle ::= \langle \text{левая скобка} \rangle \langle \text{формула} \rangle \langle \text{бинарная связка} \rangle \langle \text{формула} \rangle \langle \text{правая скобка} \rangle$

Подстрока другой строки называется подформулой тогда и только тогда, когда обе строки являются формулами.

Алгебра высказываний

Рассмотрим алгебру с носителем $\mathbb{B}$ из двух логических констант ($\mathbb{B} = \{\perp, \top\}$) и операциями отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции, которые соответственно задаются связками $\neg, \wedge, \vee, \to, \sim$.

Библиотека БГУИР

Основные законы и понятия

Интерпретацией формулы языка $\mathbb{L}$ называют функцию, отображающую множество всех атомарных подформул этой формулы на множество $\mathbb{B}$ таким образом, что для любой пары равных атомарных подформул этой формулы значения каждой подформулы из этой пары совпадают.

Например, для формулы $(P \wedge Q)$ можно рассмотреть четыре следующие интерпретации.

$$\{\langle P,\bot\rangle,\langle Q,\bot\rangle\}$$
$$\{\langle P,\bot\rangle,\langle Q,\top\rangle\}$$
$$\{\langle P,\top\rangle,\langle Q,\bot\rangle\}$$
$$\{\langle P,\top\rangle,\langle Q,\top\rangle\}$$

Эти интерпретации могут быть заданы таблично.

Таблица 1 – Таблица, задающая интерпретацию

P	Q
$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$

Общезначимость

Формула называется общезначимой логической формулой тогда и только тогда, когда она обозначает функцию, равнозначную константе $\top$.

Примером общезначимой формулы является формула $(P \to P)$.

Таблица 2 – Таблица истинности для общезначимой формулы

P	$(P \to P)$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

Ещё один пример общезначимой формулы: $(A \to (B \to A))$.

Таблица 3 – Таблица истинности для общезначимой формулы

A	B	$(B \to A)$	$(A \to (B \to A))$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Формула называется необщезначимой тогда и только тогда, когда она не является общезначимой.

Библиотека БГУИР

Противоречивость

Формула называется противоречивой логической формулой тогда и только тогда, когда она обозначает функцию, равнозначную константе $\perp$.

Примером противоречивой формулы является формула $(P \sim \neg P)$.

Таблица 4 – Таблица истинности для противоречивой формулы

P	$(P \sim \neg P)$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$

Нейтральность

Формула, не являющаяся ни общезначимой, ни противоречивой, называется нейтральной.

Примером нейтральной формулы является формула $(\neg P)$.

Таблица 5 – Таблица истинности для нейтральной формулы

P	$(\neg P)$
$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$

Выполнимость

Формула называется выполнимой (непротиворечивой) тогда и только тогда, когда она является нейтральной или общезначимой.

Примером выполнимой формулы является формула $(P \vee Q)$.

Таблица 6 – Таблица истинности для выполнимой формулы

P	Q	$(P \vee Q)$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

Формула называется невыполнимой тогда и только тогда, когда она не является выполнимой. Множество формул невыполнимо тогда и только тогда, когда конъюнкция всех этих и только этих формул невыполнима.

Следование и равносильность формул

Одна формула следует из другой тогда и только тогда, когда для любой интерпретации, для которой значение обозначаемой второй формулой функции

Библиотека БГУИР

равнозначно $\top$, значение обозначаемой первой формулой функции также равнозначно $\top$.

Например, формула $(P \to Q)$ следует из формулы $(P \wedge Q)$. Это записывается так: $((P \wedge Q) \vDash (P \to Q))$. Если формула следует из любой формулы, т. е. является общезначимой, то это записывается так: $(\vDash (P \to P))$.

Одна формула следует из другой формулы тогда и только тогда, когда множество, содержащее вторую формулу и отрицание первой формулы, невыполнимо.

Две формулы равносильны тогда и только тогда, когда следуют друг из друга. Например, формулы $(\neg P \vee Q)$ и $(P \to Q)$ равносильны, так как $((\neg P \vee Q) \vDash (P \to Q))$ и $((P \to Q) \vDash (\neg P \vee Q))$. Равносильность формул записывается так: $((P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q))$.

Следовательно, две формулы равносильны тогда и только тогда, когда обозначают равнозначные друг другу функции или – одну и ту же функцию.

Чтобы проверить, являются ли две формулы равносильными, можно вычислить значения, обозначаемых ими функций для каждой из интерпретаций, что требует $2 * 2^n$ вычислений (если считать, что обе функции имеют n аргументов) и на практике оказывается слишком громоздким. Существуют и другие методы установления равносильности формул и получения новых формул, равносильных исходной.

Свойства операций алгебры высказываний и следствия из них определяют следующие отношения равносильности ($\Leftrightarrow$) между формулами для замены одних подформул в формулах другими; такая замена является одним из способов решения логических задач.

Ассоциативность

$$((\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \Leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma))$$
$$((\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \Leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma))$$

Коммутативность

$$((\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\beta \wedge \alpha))$$
$$((\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\beta \vee \alpha))$$

Библиотека БГУИР

Дистрибутивность

$((\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \Leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)))$

$((\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \Leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)))$

Идемпотентность

$((\alpha \wedge \alpha) \Leftrightarrow \alpha)$

$((\alpha \vee \alpha) \Leftrightarrow \alpha)$

Двойное отрицание

$((\neg(\neg\alpha)) \Leftrightarrow \alpha)$

Правила де Моргана

$((\neg(\alpha \wedge \beta)) \Leftrightarrow ((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)))$

$((\neg(\alpha \vee \beta)) \Leftrightarrow ((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)))$

Свойства констант

$((\alpha \wedge \bot) \Leftrightarrow \bot)$

$((\alpha \wedge \top) \Leftrightarrow \alpha)$

$((\alpha \vee \bot) \Leftrightarrow \alpha)$

$((\alpha \vee \top) \Leftrightarrow \top)$

$((\neg \bot) \Leftrightarrow \top)$

$((\neg \top) \Leftrightarrow \bot)$

Закон противоречия

$((\alpha \wedge (\neg\alpha)) \Leftrightarrow \bot)$

Закон «исключённого третьего»

$((\alpha \vee (\neg\alpha)) \Leftrightarrow \top)$

Выражение связок

$((\alpha \to \beta) \Leftrightarrow ((\neg\alpha) \vee \beta))$

$((\alpha \sim \beta) \Leftrightarrow ((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)))$

Следующие равносильные преобразования можно доказать, используя предыдущие.

Поглощение

$((\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)) \Leftrightarrow \alpha)$

$((\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)) \Leftrightarrow \alpha)$

Библиотека БГУИР

Склеивание

$$\left(\left(\left(\alpha \vee \beta\right) \wedge \left(\alpha \vee \left(\neg \beta\right)\right)\right) \Leftrightarrow \alpha\right)$$

$$\left(\left(\left(\alpha \wedge \beta\right) \vee \left(\alpha \wedge \left(\neg \beta\right)\right)\right) \Leftrightarrow \alpha\right)$$

и другие.

Обычно при решении замену производят в следующем порядке: вначале избавляются от эквиваленций и импликаций, заменяя их другими связками. Потом, используя свойства и правила де Моргана двойного отрицания, дистрибутивности, коммутативности, ассоциативности, идемпотентности и свойства констант, переходят к конъюнктивной нормальной форме (КНФ) или дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ), а затем уже от них, если требуется, переходят к СКНФ или СДНФ (совершенным КНФ и ДНФ).

Примеры заданий

Задание: выписать все подформулы заданной формулы:

$$\left(P \rightarrow \left(Q \sim \left(\left(\neg\left(R \wedge S\right)\right) \rightarrow \left(R \vee S\right)\right)\right)\right)$$

Решение состоит в последовательном выписывании подформул заданной формулы, которые выявляются путём разбиения сложных формул на их составляющие.

Ответ: подформулами этой формулы будут следующие десять формул:

$\left(P \rightarrow \left(Q \sim \left(\left(\neg\left(R \wedge S\right)\right) \rightarrow \left(R \vee S\right)\right)\right)\right)$	P
$\left(Q \sim \left(\left(\neg\left(R \wedge S\right)\right) \rightarrow \left(R \vee S\right)\right)\right)$	Q
$\left(\left(\neg\left(R \wedge S\right)\right) \rightarrow \left(R \vee S\right)\right)$	$\left(\neg\left(R \wedge S\right)\right)$
$\left(R \wedge S\right)$	R
S	$\left(R \vee S\right)$

Задание: построить таблицу истинности для заданной формулы:

$$\left(P \rightarrow \left(Q \sim \left(\left(\neg\left(R \wedge S\right)\right) \rightarrow \left(R \vee S\right)\right)\right)\right)$$

Библиотека БГУИР

Решение: используя таблицы истинности базовых логических операций, получаем:

Таблица 7 – Таблица истинности для подформул заданной формулы

P	Q	R	S	$(R \wedge S)$	$(R \vee S)$	$(\neg(R \wedge S))$	$((\neg(R \wedge S)) \to (R \vee S))$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$

Ответ: см. таблицу 8.

Таблица 8 – Таблица истинности для заданной формулы

P	Q	R	S	$(Q \sim ((\neg(R \wedge S)) \to (R \vee S)))$	$(P \to (Q \sim ((\neg(R \wedge S)) \to (R \vee S))))$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Задание: построить совершенную конъюнктивную и совершенную дизъюнктивную нормальные формы для функции, заданной формулой:

$$((P \wedge Q) \sim ((\neg R) \to Q))$$

Библиотека БГУИР

Решение: предварительно строим таблицу истинности и затем по ней, в соответствии с методом [1, с. 17–19], получаем требуемые нормальные формы:

Таблица 9 – Таблица истинности для заданной формулы

P	Q	R	$(P\wedge Q)$	$(\neg R)$	$((\neg R)\to Q)$	$((P\to Q)\sim((\neg R)\to Q))$
⊥	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥
⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥
⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤

Ответ: совершенная конъюнктивная и совершенная дизъюнктивная нормальные формы для заданной функции следующие:

$$\left(\left(\left(\left((P\vee Q)\vee(\neg R)\right)\wedge\left((P\vee(\neg Q))\vee R\right)\right)\wedge\left((P\vee(\neg Q))\vee(\neg R)\right)\right)\wedge\left(((\neg P)\vee Q)\vee(\neg R)\right)\right)$$

$$\left(\left(\left(\left(((\neg P)\wedge(\neg Q))\wedge(\neg R)\right)\vee\left((P\wedge(\neg Q))\wedge(\neg R)\right)\right)\vee\left((P\wedge Q)\wedge(\neg R)\right)\right)\vee\left((P\wedge Q)\wedge R\right)\right)$$

Задание: определить к какому классу относится заданная формула:

$$\left(Q\to\left((P\to Q)\sim((\neg R)\to Q)\right)\right)$$

Решение: строим таблицы истинности и на основе соответствующих определений формируем ответ.

Таблица 10 – Таблица истинности для подформул заданной формулы

P	Q	R	$(P\to Q)$	$(\neg R)$	$((\neg R)\to Q)$	$((P\to Q)\sim((\neg R)\to Q))$
⊥	⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊥
⊥	⊥	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊥	⊤	⊥	⊤
⊤	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤	⊥
⊤	⊤	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤
⊤	⊤	⊤	⊤	⊥	⊤	⊤

Таблица 11 – Таблица истинности для заданной формулы

P	Q	R	$\left(Q\to\left((P\to Q)\sim((\neg R)\to Q)\right)\right)$
⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤
⊥	⊤	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤
⊤	⊥	⊤	⊤
⊤	⊤	⊥	⊤
⊤	⊤	⊤	⊤

Ответ: заданная формула относится к классу общезначимых формул.

Библиотека БГУИР

Задание: методом равносильных преобразований [1, с. 26] привести к конъюнктивной нормальной форме следующую формулу:

$$\left(P\to\left(Q\sim\left(\left(\neg(R\wedge S)\right)\to(R\vee S)\right)\right)\right)$$

Решение:

$$\left(P\to\left(Q\sim\left(\left(\neg(R\wedge S)\right)\to(R\vee S)\right)\right)\right)\Leftrightarrow\left(P\to\left(Q\sim\left(\left(\neg\left(\neg(R\wedge S)\right)\right)\vee(R\vee S)\right)\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(P\to\left(Q\sim\left((R\wedge S)\vee(R\vee S)\right)\right)\right)\Leftrightarrow\left(P\to\left(Q\sim\left(\left((R\wedge S)\vee R\right)\vee S\right)\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(P\to\left(Q\sim\left(\left((R\vee R)\wedge(S\vee R)\right)\vee S\right)\right)\right)\Leftrightarrow\left(P\to\left(Q\sim\left(\left(R\wedge(S\vee R)\right)\vee S\right)\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(P\to\left(Q\sim\left((R\vee S)\wedge\left((S\vee R)\vee S\right)\right)\right)\right)\Leftrightarrow\left(P\to\left(Q\sim\left((R\vee S)\wedge\left((R\vee S)\vee S\right)\right)\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(P\to\left(Q\sim\left((R\vee S)\wedge\left(R\vee(S\vee S)\right)\right)\right)\right)\Leftrightarrow\left(P\to\left(Q\sim\left((R\vee S)\wedge(R\vee S)\right)\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(P\to\left(Q\sim(R\vee S)\right)\right)\Leftrightarrow\left(P\to\left(\left(Q\to(R\vee S)\right)\wedge\left((R\vee S)\to Q\right)\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(P\to\left(\left((\neg Q)\vee(R\vee S)\right)\wedge\left(\left(\neg(R\vee S)\right)\vee Q\right)\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(P\to\left(\left(\left((\neg Q)\vee R\right)\vee S\right)\wedge\left(\left(\neg(R\vee S)\right)\vee Q\right)\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(P\to\left(\left(\left((\neg Q)\vee R\right)\vee S\right)\wedge\left(\left((\neg R)\wedge(\neg S)\right)\vee Q\right)\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(P\to\left(\left(\left((\neg Q)\vee R\right)\vee S\right)\wedge\left(Q\vee\left((\neg R)\wedge(\neg S)\right)\right)\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(P\to\left(\left(\left((\neg Q)\vee R\right)\vee S\right)\wedge\left(\left(Q\vee(\neg R)\right)\wedge\left(Q\vee(\neg S)\right)\right)\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left((\neg P)\vee\left(\left(\left((\neg Q)\vee R\right)\vee S\right)\wedge\left(\left(Q\vee(\neg R)\right)\wedge\left(Q\vee(\neg S)\right)\right)\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\left(\left((\neg P)\vee(\neg Q)\right)\vee R\right)\vee S\right)\wedge\left(\left(\left((\neg P)\vee Q\right)\vee(\neg R)\right)\wedge\left(\left((\neg P)\vee Q\right)\vee(\neg S)\right)\right)\right)$$

Ответ: конъюнктивная нормальная форма для заданной формулы следующая:

$$\left(\left(\left(\left((\neg P)\vee(\neg Q)\right)\vee R\right)\vee S\right)\wedge\left(\left(\left((\neg P)\vee Q\right)\vee(\neg R)\right)\wedge\left(\left((\neg P)\vee Q\right)\vee(\neg S)\right)\right)\right)$$

Упражнения

1 Выписать все подформулы заданной формулы:

$$\left(\left(\left((\neg P)\wedge Q\right)\sim R\right)\vee\left((S\to P)\wedge Q\right)\right)$$

$$\left(R\sim\left(\left((\neg P)\vee(Q\wedge R)\right)\sim\left(S\to(S\to P)\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(\left(\left(P\wedge(\neg Q)\right)\to R\right)\sim P\right)\vee(P\wedge Q)\right)$$

$$\left(\left((P\sim Q)\sim\left(\left(\left((P\wedge R)\wedge P\right)\vee(\neg P)\right)\to Q\right)\right)\vee Q\right)$$

Библиотека БГУИР

2 Построить таблицу истинности для заданных формул:

$\left(\neg\left(\left(S\to\left(\left(\neg T\right)\vee\left(P\wedge Q\right)\right)\right)\sim\left(P\wedge\left(\neg\left(Q\to T\right)\right)\right)\right)\right)$

$\left(\left(P\to Q\right)\vee\left(P\to\left(Q\wedge P\right)\right)\right)$

$\left(\left(\left(P\wedge\left(\neg Q\right)\right)\to Q\right)\to\left(P\to Q\right)\right)$

$\left(\left(P\to\left(Q\wedge R\right)\right)\sim\left(\left(P\wedge\left(\neg Q\right)\right)\to\left(\neg R\right)\right)\right)$

$\left(Q\to\left(\left(P\vee R\right)\to\left(R\to\left(\neg Q\right)\right)\right)\right)$

$\left(\left(\left(\neg P\right)\to\left(Q\wedge R\right)\right)\sim\left(\left(\neg\left(\neg\left(P\vee Q\right)\right)\right)\to S\right)\right)$

$\left(R\to\left(\left(\left(\neg\left(P\vee R\right)\right)\wedge\left(\neg P\right)\right)\vee Q\right)\right)$

$\left(\left(R\to P\right)\to\left(P\sim\left(\neg\left(P\right)\vee Q\right)\right)\right)$

$\left(\left(S\sim R\right)\sim\left(\left(\left(\left(P\wedge S\right)\wedge Q\right)\vee\left(\neg S\right)\right)\to R\right)\right)$

$\left(\left(P\sim Q\right)\sim R\right)$

3 Построить совершенную конъюнктивную и совершенную дизъюнктивную нормальные формы для функций, заданных формулами:

$\left(\left(Q\vee\left(R\wedge\left(\neg P\right)\right)\right)\to\left(P\sim R\right)\right)$

$\left(\left(\left(P\vee Q\right)\to R\right)\to\left(\left(P\vee R\right)\to\left(Q\vee R\right)\right)\right)$

$\left(\left(\neg\left(\left(P\wedge Q\right)\to P\right)\right)\vee\left(P\wedge\left(Q\vee R\right)\right)\right)$

$\left(\left(P\wedge\left(Q\vee R\right)\right)\to\left(\left(P\wedge Q\right)\vee R\right)\right)$

4 Определить, к какому классу относится заданная формула:

$\left(\left(Q\vee R\right)\to\left(\left(P\vee Q\right)\to\left(P\vee R\right)\right)\right)$

$\left(\neg\left(P\to\left(P\to\left(Q\sim Q\right)\right)\right)\right)$

$\left(\left(P\wedge Q\right)\sim\left(\left(\neg P\right)\vee\left(\neg R\right)\right)\right)$

$\left(\left(\neg\left(P\wedge Q\right)\right)\sim\left(\left(\neg P\right)\to Q\right)\right)$

$\left(\left(\left(\neg P\right)\to P\right)\to\left(R\vee Q\right)\right)$

$\left(\left(\left(\left(P\to R\right)\wedge\left(Q\to S\right)\right)\wedge\left(\left(\neg P\right)\vee\left(\neg S\right)\right)\right)\to\left(\left(\neg P\right)\vee\left(\neg Q\right)\right)\right)$

$\left(\left(P\vee\left(P\wedge Q\right)\right)\sim\left(\neg P\right)\right)$

$\left(\left(P\to Q\right)\to\left(\left(P\to\left(Q\to R\right)\right)\to\left(P\to R\right)\right)\right)$

$\left(\left(\left(P\wedge Q\right)\to R\right)\sim\left(\left(P\to Q\right)\to R\right)\right)$

Библиотека БГУИР

$$\left(\neg\left(\left(\neg P\right)\wedge\left(Q\wedge\left(P\vee R\right)\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(P\to Q\right)\wedge\left(\left(\neg P\right)\to\left(\neg Q\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(\neg P\right)\vee\left(Q\wedge\left(\neg R\right)\right)\vee R\right)$$

5 Методом равносильных преобразований привести записанные ниже формулы к конъюнктивной нормальной форме:

$$\left(\left(\left(P\wedge R\right)\vee\left(P\wedge Q\right)\right)\wedge\left(R\vee P\right)\right)$$

$$\left(\left(P\sim Q\right)\to\left(P\wedge R\right)\right)$$

$$\left(\left(P\wedge\left(\neg\left(P\wedge Q\right)\right)\right)\wedge Q\right)$$

$$\left(P\vee\left(\left(Q\vee\left(R\wedge S\right)\right)\wedge\left(S\vee R\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(\left(\neg P\right)\to\left(\neg Q\right)\right)\sim\left(Q\to P\right)\right)$$

$$\left(\left(\left(\left(P\to\left(Q\vee R\right)\right)\wedge\left(S\to\left(P\vee Q\right)\right)\right)\wedge\left(Q\to R\right)\right)\wedge\left(\left(R\to\left(\neg Q\right)\right)\wedge\left(S\to\left(\neg R\right)\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(\left(P\sim Q\right)\wedge\left(\neg\left(Q\sim P\right)\right)\right)\vee\left(\left(Q\sim P\right)\wedge\left(\neg\left(P\sim Q\right)\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(\left(\left(P\to Q\right)\to R\right)\wedge\left(P\wedge Q\right)\right)\wedge\left(\neg R\right)\right)$$

$$\left(\left(\left(\neg P\right)\to P\right)\to Q\right)$$

Исчисление высказываний

Аксиоматика

В таблице приведены аксиомные схемы, задающие аксиомы для введения и удаления логических связок по отношению к формулам, являющимся подформулами этих аксиом.

Таблица 12 – Таблица аксиомных схем исчисления высказываний

	Введение	Удаление
$\to$	$(\alpha\to(\beta\to\alpha))$	$((\gamma\to\alpha)\to((\gamma\to(\alpha\to\beta))\to(\gamma\to\beta)))$
$\wedge$	$(\alpha\to(\beta\to(\alpha\wedge\beta)))$	$((\alpha\wedge\beta)\to\alpha)$ $((\alpha\wedge\beta)\to\beta)$
$\vee$	$(\alpha\to(\alpha\vee\beta))$ $(\alpha\to(\beta\vee\alpha))$	$((\alpha\to\gamma)\to((\beta\to\gamma)\to((\alpha\vee\beta)\to\gamma)))$
$\neg$	$((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to(\neg\beta))\to(\neg\alpha)))$	$((\neg(\neg\alpha))\to\alpha)$
$\sim$	$((\alpha\to\beta)\to((\beta\to\alpha)\to(\alpha\sim\beta)))$	$((\alpha\sim\beta)\to(\alpha\to\beta))$ $((\alpha\sim\beta)\to(\beta\to\alpha))$

Библиотека БГУИР

Названия этих аксиомных схем следующие: «аксиомная схема введения импликации», «аксиомная схема удаления импликации», «аксиомная схема введения конъюнкции» и т. д.

Правила вывода

Над формулами исчисления с помощью правил вывода задаётся отношение выводимости ((логического) вывода) $\vdash$. Рассмотрим правило вывода, которое называется правилом прямого заключения, или правилом Modus Ponens, и описано на метаязыке в следующей формулировке.
Для любого множества $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G} \subseteq \mathbb{L}$$

и для любых формул α и β языка $\mathbb{L}$ выполняется следующее выражение:

$$\left(\left(\mathfrak{G} \cup \{\alpha, (\alpha \to \beta)\}\right) \vdash \left(\mathfrak{G} \cup \{\beta\}\right)\right);$$

кроме вышеприведённого свойства, отношение вывода является транзитивным отношением и обладает следующим свойством:

$$\left((\mathfrak{G} \cup \mathfrak{F}) \vdash \mathfrak{F}\right),$$

где $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F}$ – произвольные множества формул языка $\mathbb{L}$. Другие свойства этого отношения могут быть сформулированы в виде метатеорем.

Принцип и правило резолюции

Ещё одной метатеоремой является правило резолюции, которое является правилом вывода, описывающим метод резолюций в применении к дизъюнктам.

Частные случаи этого правила:

$$\left(\left(\mathfrak{G} \cup \{(\alpha \vee \gamma)\} \cup \{(\beta \vee (\neg\gamma))\}\right) \vdash \left(\mathfrak{G} \cup \{(\alpha \vee \beta)\}\right)\right)$$

$$\left(\left(\mathfrak{G} \cup \{(\alpha \vee \gamma)\} \cup \{(\neg\gamma)\}\right) \vdash \left(\mathfrak{G} \cup \{\alpha\}\right)\right)$$

$$\left(\left(\mathfrak{G} \cup \{\gamma\} \cup \{(\alpha \vee (\neg\gamma))\}\right) \vdash \left(\mathfrak{G} \cup \{\alpha\}\right)\right)$$

здесь $\mathfrak{G}$ – произвольное множество формул языка $\mathbb{L}$. Формула, получаемая по правилу резолюции, называется резольвентой.

Алгоритм, основывающийся на этом правиле, быстр и удобен в применении к особым видам формул – хорновским дизъюнктам.

Примеры заданий

Задание: доказать заданную формулу (т. е. построить и записать её формальный вывод в виде последовательности формул, полученных по правилам вывода из предыдущих или являющихся аксиомами):

$$(A \to A).$$

Библиотека БГУИР

Решение состоит в последовательной записи формул, формирующих вывод.

Ответ:

$1:\langle - \to \rangle\Big(\big(A \to (A \to A)\big) \to \Big(\big(A \to ((A \to A) \to A)\big) \to (A \to A)\Big)\Big)$

$2:\langle + \to \rangle\big(A \to (A \to A)\big)$

$3:\langle 2,1 \rangle\Big(\big(A \to ((A \to A) \to A)\big) \to (A \to A)\Big)$

$4:\langle + \to \rangle\big(A \to ((A \to A) \to A)\big)$

$5:\langle 4,3 \rangle(A \to A)$

В данном примере $\langle - \to \rangle$ означает, что для получения формулы 1 используется аксиомная схема удаления импликации; $\langle + \to \rangle$ означает, что для получения формул 2 и 4 используется аксиомная схема введения импликации, $\langle 4,3 \rangle$ – формула 5 получена по правилу вывода Modus Ponens (правилу прямого заключения) из формул 4 и 3.

Задание: преобразовать с помощью равносильных преобразований систему формул и затем проверить результат на непротиворечивость методом резолюций:

$$\begin{cases} \big(R \to (\neg P)\big) \\ (P \vee Q) \\ \big((Q \wedge R) \sim (R \to S)\big) \\ \big(\neg(S \wedge Q)\big) \end{cases}$$

Решение:

$1:\big(R \to (\neg P)\big)$

$2:(P \vee Q)$

$3:\big((Q \wedge R) \sim (R \to S)\big)$

$4:\big(\neg(S \wedge Q)\big)$

$5:\langle 1 \rangle\big((\neg R) \vee (\neg P)\big)$

$6:\langle 3 \rangle\Big(\big((Q \wedge R) \to (R \to S)\big) \wedge \big((R \to S) \to (Q \wedge R)\big)\Big)$

$7:\langle 6 \rangle\big((Q \wedge R) \to (R \to S)\big)$

$8:\langle 6 \rangle\big((R \to S) \to (Q \wedge R)\big)$

$9:\langle 7 \rangle\Big(\big(\neg(Q \wedge R)\big) \vee (R \to S)\Big)$

$10:\langle 8 \rangle\Big(\big(\neg(R \to S)\big) \vee (Q \wedge R)\Big)$

$11:\langle 9 \rangle\Big(\big((\neg Q) \vee (\neg R)\big) \vee (R \to S)\Big)$

$12:\langle 10\rangle\left(\left(\neg\left((\neg R)\vee S\right)\right)\vee(Q\wedge R)\right)$
$13:\langle 11\rangle\left(\left((\neg Q)\vee(\neg R)\right)\vee\left((\neg R)\vee S\right)\right)$
$14:\langle 13\rangle\left(\left((\neg Q)\vee(\neg R)\right)\vee\left(S\vee(\neg R)\right)\right)$
$15:\langle 14\rangle\left(\left((\neg Q)\vee S\right)\vee(\neg R)\right)$
$16:\langle 12\rangle\left(\left(R\wedge(\neg S)\right)\vee(Q\wedge R)\right)$
$17:\langle 16\rangle\left(\left((\neg S)\wedge R\right)\vee(Q\wedge R)\right)$
$18:\langle 17\rangle\left(\left((\neg S)\vee Q\right)\wedge R\right)$
$19:\langle 18\rangle\left((\neg S)\vee Q\right)$
$20:\langle 18\rangle R$
$21:\langle 4\rangle\left((\neg S)\vee(\neg Q)\right)$
$22:\langle 20,5\rangle(\neg P)$
$23:\langle 22,2\rangle Q$
$24:\langle 23,21\rangle(\neg S)$
$25:\langle 20,15\rangle\left((\neg Q)\vee S\right)$
$26:\langle 25,24\rangle(\neg Q)$
$27:\langle 26,23\rangle\perp$

Ответ: система формул противоречива.

В данном примере $\langle 1\rangle$ означает, что формула 5 получена равносильным преобразованием (следует) из формулы 1, $\langle 3\rangle$ – формула 6 получена равносильным преобразованием из формулы 3, $\langle 6\rangle$ – формулы 7 и 8 являются подформулами конъюнктивной формулы, полученной равносильным преобразованием из формулы 6, $\langle 20,5\rangle$ – формула 22 является резольвентой формул 20 и 5 и т. д.

Библиотека БГУИР

Упражнения

1 Доказать заданные формулы:

$\left(\left(A \vee B\right) \to \left(B \vee A\right)\right)$

$\left(\left(A \wedge B\right) \to \left(B \vee A\right)\right)$

$\left(A \to \left(A \wedge A\right)\right)$

$\left(\left(A \wedge A\right) \sim A\right)$

$\left(A \vee \left(A \sim A\right)\right)$

$\left(A \to \left(\neg\left(\neg A\right)\right)\right)$

$\left(\neg\left(A \wedge \left(\neg A\right)\right)\right)$

$\left(A \vee \left(\neg A\right)\right)$

$\left(\left(A \to B\right) \to \left(\left(\neg B\right) \to \left(\neg A\right)\right)\right)$

$\left(B \to \left(\left(\neg B\right) \to A\right)\right)$

$\left(\left(\left(A \to B\right) \wedge \left(B \to C\right)\right) \to \left(A \to C\right)\right)$

$\left(\left(\left(A \to \left(B \to C\right)\right)\right) \to \left(\left(A \wedge B\right) \to C\right)\right)$

$\left(\left(\left(A \wedge B\right) \to C\right) \to \left(\left(A \to \left(B \to C\right)\right)\right)\right)$

$\left(\left(A \to \left(B \to \left(A \wedge B\right)\right)\right)\right)$

$\left(\left(A \to B\right) \to \left(\left(A \to \left(A \to B\right)\right)\right)\right)$

2 Преобразовать систему формул и проверить результат на непротиворечивость методом резолюций:

$$\begin{cases}\left(C \to A\right)\\ \left(C \to B\right)\\ C\\ \left(\neg\left(A \wedge B\right)\right)\end{cases} \qquad \begin{cases}\left(A \to B\right)\\ \left(C \to E\right)\\ \left(\left(\neg B\right) \wedge \left(\neg E\right)\right)\\ \left(A \vee C\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(C \to \left(\neg A\right)\right)\\ A\\ \left(\neg B\right)\end{cases} \qquad \begin{cases}\left(A \sim B\right)\\ \left(B \sim C\right)\\ \left(\left(\neg C\right) \sim A\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(A \to \left(B \to C\right)\right)\\ \left(\neg C\right)\\ \left(A \wedge B\right)\end{cases} \qquad \begin{cases}\left(B \to \left(\neg A\right)\right)\\ A\\ \left(\neg B\right)\end{cases}$$

Библиотека БГУИР

Логика предикатов

Алгебраические системы и модели логики предикатов

В логике предикатов каждый предикат формально понимается как функция, характеризующая некоторое отношение. В связи с этим рассмотрим примеры операций [18, с. 40 – 44] над отношениями, которые используются как одни из основных при решении задач в логике предикатов.

Операция объединения отношений

Пусть есть отношения, заданные таблично:

Таблица 13 – Отношения R1 и R2

R1			
X	Y	Z	T
a	a	a	a
a	b	b	a
a	b	c	d
a	b	a	d
c	d	b	a

R2			
T	Z	Y	X
a	b	a	b
a	c	a	c
a	c	c	a
a	b	b	a
d	a	b	a
c	c	c	c

Объединением этих отношений будет отношение R3.

Таблица 14 – Отношение R3

R3			
X	Y	Z	T
a	a	a	a
a	b	b	a
a	b	c	d
a	b	a	d
c	d	b	a
b	a	b	a
c	a	c	a
a	c	c	a
c	c	c	c

Библиотека БГУИР

Операция соединения отношений

Пусть есть отношения, заданные таблично:

Таблица 15 – Отношения R1 и R2

R1			
X	Y	Z	T
a	a	a	a
a	b	b	a
a	b	c	d
a	b	a	d
c	d	b	a

R2			
T	Z	Y	X
a	b	a	b
a	c	a	c
a	c	c	a
a	b	b	a
d	a	b	a
c	c	c	c

Соединением этих отношений будет отношение R3.

Таблица 16 – Отношение R3

R3			
X	Y	Z	T
a	b	b	a
a	b	a	d

Пусть есть отношения, заданные таблично:

Таблица 17 – Отношения R1 и R2

R1			
X	Y	Z	T
a	a	a	a
a	b	b	a
a	b	c	d
a	b	a	d
c	d	b	a

R2			
T	U	V	X
a	b	a	b
a	c	a	c
a	c	c	a
a	b	b	a
d	a	b	a
c	c	c	c

Библиотека БГУИР

Соединением этих отношений будет отношение R3.

Таблица 18 – Отношение R3

R3					
T	U	V	X	Y	Z
a	c	a	c	d	b
a	c	c	a	a	a
a	c	c	a	b	b
a	b	b	a	a	a
a	b	b	a	b	b
d	a	b	a	b	c
d	a	b	a	b	a

Пусть есть отношения, заданные таблично:

Таблица 19 – Отношения R1 и R2

R1			
X	Y	Z	T
a	a	a	a
a	b	b	a
a	b	c	a
a	b	a	b
c	d	b	a

R2			
T	U	V	W
d	b	a	b
c	c	a	c
c	c	c	a
d	b	b	a
d	a	b	a
c	c	c	c

Соединением этих отношений будет пустое отношение R3.

Таблица 20 – Отношение R3

R3						
T	U	V	W	X	Y	Z

Пусть есть отношения, заданные таблично:

Таблица 21 – Отношения R1 и R2

R1			
X	Y	Z	T
a	b	b	a
a	b	a	d
c	d	b	a

R2			
S	U	V	W
a	c	a	c
a	b	b	a
d	a	b	a
c	c	c	c

Библиотека БГУИР

Соединением этих отношений будет отношение R3.

Таблица 22 – Отношение R3

R3							
S	T	U	V	W	X	Y	Z
a	a	c	a	c	a	b	b
a	d	c	a	c	a	b	a
a	a	c	a	c	c	d	b
a	a	b	b	a	a	b	b
a	d	b	b	a	a	b	a
a	a	b	b	a	c	d	b
d	a	a	b	a	a	b	b
d	d	a	b	a	a	b	a
d	a	a	b	a	c	d	b
c	a	c	c	c	a	b	b
c	d	c	c	c	a	b	a
c	a	c	c	c	c	d	b

Операция проекции отношений

Пусть есть отношение R3, заданное таблично.

Таблица 23 – Отношение R3

R3			
X	Y	Z	T
a	a	a	a
a	b	b	a
a	b	c	d
a	b	a	d
c	d	b	a
b	a	b	a
c	a	c	a
a	c	c	a
c	c	c	c

Проекциями этого отношения по атрибуту X и по атрибутам X, Y, T будут соответственно множество R1 и отношение R2.

Библиотека БГУИР

Таблица 24 – Множество R1 и отношение R2

R1
X
a
b
c

R2		
X	Y	T
a	a	a
a	b	a
a	b	d
c	d	a
b	a	a
c	a	a
a	c	a
c	c	c

Алфавит языка логики предикатов

По аналогии с языком логики высказываний зададим язык логики предикатов. Алфавит языка логики предикатов (первого порядка) строится на основе алфавита языка логики высказываний и является его расширением.

$\langle \text{конечный строчный символ} \rangle ::= z \mid y \mid x \mid w \mid v \mid u \mid t$

$\langle \text{предметная переменная} \rangle ::= \langle \text{конечный строчный символ} \rangle \big[\{ \langle \text{натуральное} \rangle \} \big]$

$\langle \text{начальный строчный символ} \rangle ::= a \mid b \mid c \mid d \mid e \mid f \mid g$

$\langle \text{константное имя} \rangle ::= \langle \text{начальный строчный символ} \rangle \big[\{ \langle \text{натуральное} \rangle \} \big]$

$\langle \text{запятая} \rangle ::= ,$

$\langle \text{всеобщность} \rangle ::= \forall$

$\langle \text{существование} \rangle ::= \exists$

$\langle \text{квантор} \rangle ::= \langle \text{всеобщность} \rangle \mid \langle \text{существование} \rangle$

Синтаксис языка логики предикатов

Синтаксис языка логики предикатов строится независимо от синтаксиса языка логики высказываний и описывается следующей грамматикой.

$\langle \text{предикатное имя} \rangle ::= \langle \text{символ} \rangle \big[\{ \langle \text{натуральное} \rangle \} \big]$

$\langle \text{терм} \rangle ::= \langle \text{переменная} \rangle \mid \langle \text{константное имя} \rangle \big[\langle \text{список термов} \rangle \big]$

$\langle \text{список термов} \rangle ::= \langle \text{левая скобка} \rangle \langle \text{терм} \rangle \big[\{ \langle \text{запятая} \rangle \langle \text{терм} \rangle \} \big] \langle \text{правая скобка} \rangle$

$\langle \text{атомарная предикатная формула} \rangle ::= \langle \text{предикатное имя} \rangle \big[\langle \text{список термов} \rangle \big]$

Библиотека БГУИР

$$\langle \text{формула} \rangle ::= \langle \text{константа} \rangle \mid \langle \text{атомарная предикатная формула} \rangle \mid \langle \text{сложная формула} \rangle$$

$$\langle \text{сложная формула} \rangle ::= \langle \text{унарная сложная формула} \rangle \mid \langle \text{бинарная сложная формула} \rangle \mid \langle \text{кванторная формула} \rangle$$

$$\langle \text{унарная сложная формула} \rangle ::= \langle \text{левая скобка} \rangle \langle \text{унарная связка} \rangle \langle \text{формула} \rangle \langle \text{правая скобка} \rangle$$

$$\langle \text{бинарная формула} \rangle ::= \langle \text{левая скобка} \rangle \langle \text{формула} \rangle \langle \text{бинарная связка} \rangle \langle \text{формула} \rangle \langle \text{правая скобка} \rangle$$

$$\langle \text{кванторная формула} \rangle ::= \langle \text{левая скобка} \rangle \langle \text{квантор} \rangle \langle \text{предметная переменная} \rangle \langle \text{формула} \rangle \langle \text{правая скобка} \rangle$$

Равносильные преобразования

В дополнение к равносильным преобразованиям логики высказываний в логике предикатов рассматриваются следующие равносильные преобразования над кванторами.

Коммутативность

$$\left(\left(\forall \chi\left(\forall \lambda \alpha(\chi, \lambda)\right)\right) \Leftrightarrow \left(\forall \lambda\left(\forall \chi \alpha(\chi, \lambda)\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(\exists \chi\left(\exists \lambda \alpha(\chi, \lambda)\right)\right) \Leftrightarrow \left(\exists \lambda\left(\exists \chi \alpha(\chi, \lambda)\right)\right)\right)$$

Дистрибутивность

$$\left(\left(\forall \chi\left(\alpha(\chi) \wedge \beta(\chi)\right)\right) \Leftrightarrow \left(\left(\forall \chi \alpha(\chi)\right) \wedge \left(\forall \chi \beta(\chi)\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(\exists \chi\left(\alpha(\chi) \vee \beta(\chi)\right)\right) \Leftrightarrow \left(\left(\exists \chi \alpha(\chi)\right) \vee \left(\exists \chi \beta(\chi)\right)\right)\right)$$

Вынос констант (γ)

$$\left(\left(\forall \chi\left(\alpha(\chi) \wedge \gamma\right)\right) \Leftrightarrow \left(\left(\forall \chi \alpha(\chi)\right) \wedge \gamma\right)\right)$$

$$\left(\left(\exists \chi\left(\alpha(\chi) \wedge \gamma\right)\right) \Leftrightarrow \left(\left(\exists \chi \alpha(\chi)\right) \wedge \gamma\right)\right)$$

$$\left(\left(\forall \chi\left(\alpha(\chi) \vee \gamma\right)\right) \Leftrightarrow \left(\left(\forall \chi \alpha(\chi)\right) \vee \gamma\right)\right)$$

$$\left(\left(\exists \chi\left(\alpha(\chi) \vee \gamma\right)\right) \Leftrightarrow \left(\left(\exists \chi \alpha(\chi)\right) \vee \gamma\right)\right)$$

Двойственность кванторов

$$\left(\left(\neg\left(\forall \chi \alpha(\chi)\right)\right) \Leftrightarrow \left(\exists \chi\left(\neg \alpha(\chi)\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(\neg\left(\exists \chi \alpha(\chi)\right)\right) \Leftrightarrow \left(\forall \chi\left(\neg \alpha(\chi)\right)\right)\right)$$

Сколемовские, предварённые и нормальные формы

Предварённой нормальной конъюктивной (дизъюнктивной) формой называется формула, в которой нет некванторной подформулы, которая имеет кванторную подформулу, и в которой присутствует в качестве подформулы КНФ (ДНФ), которая не является подформулой формулы, не являющейся кванторной формулой или КНФ (ДНФ). Другими словами, предварённая нормальная форма – это формула, у которой все кванторы записаны слева, а оставшаяся подформула является КНФ (ДНФ), не включающей кванторов. Сколемовская (стандартная) форма получается из предварённой нормальной формы [2, с. 29 – 35] путём преобразования последней и записью в виде текста расширения рассмотренного языка предикатов, допускающего константы и функциональные термы в качестве аргументов предикатов. Строится сколемовская стандартная форма следующим образом.

Библиотека БГУИР

Если предварённая нормальная форма является кванторной формулой существования, то каждая во всех вхождениях переменная, связанная квантором, заменяется константой, которая отсутствует в формуле, и процесс повторяется для оставшейся подформулы.

Далее, если квантор существования расположен после кванторов общности, то соответствующая переменная, связанная квантором существования заменяется отсутствующим в исходной формуле функциональным термом, список аргументов в котором содержит все переменные, связанные расположенными до рассматриваемого квантора существования кванторами общности. Все кванторы общности исключатся из исходной формулы. Рассмотрим следующий пример.

Пусть есть формула $\left(\exists\chi\left(\forall\lambda\left(\forall\delta\left(\exists\gamma\left(\forall\sigma P(\chi,\lambda,\delta,\gamma,\sigma)\right)\right)\right)\right)\right)$, тогда её сколемовская стандартная форма выглядит следующим образом:

$$P\left(a,\lambda,\delta,\varphi\left(\langle\lambda,\delta\rangle\right),\sigma\right)$$

Примеры заданий

Задание: записать предложение на логическом языке логики предикатов и на графовом логическом языке:
«Для любого отрезка существует прямая, включающая его».

Ответ: это предложение на языке логики предикатов можно записать в виде следующей формулы:

$$\left(\forall x\left(S1(x)\rightarrow\left(\exists y\left(S2(y)\wedge S3(x,y)\right)\right)\right)\right)$$

На графовом [18, с. 157 – 257] логическом языке SCL [19, с. 217 – 252] эта конструкция будет выглядеть так, как показано на рисунке 1.

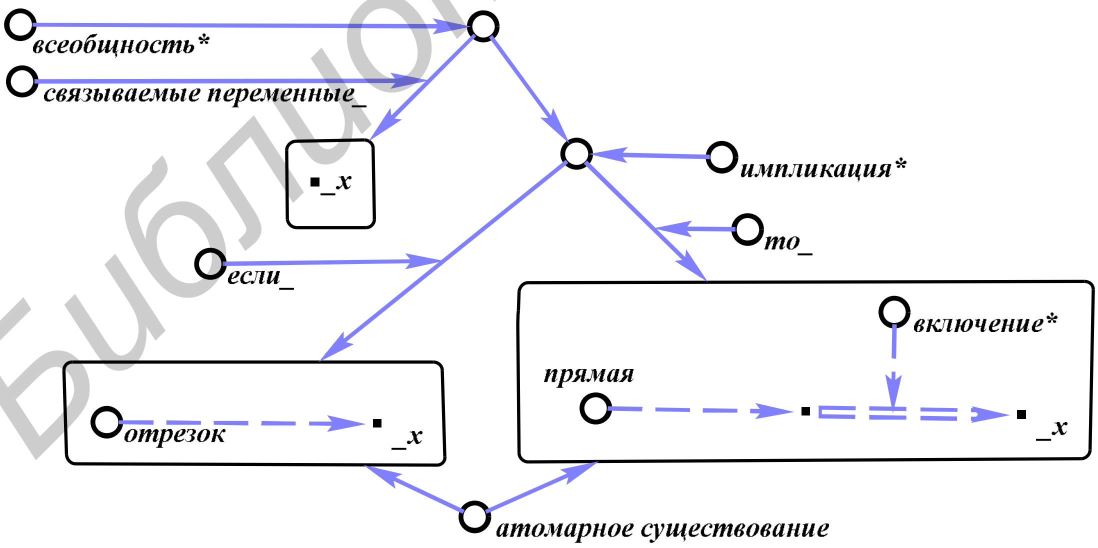


Рисунок 1 – Формальная запись выражения «Для любого отрезка существует прямая, включающая его» на языке SCL

Задание: определить, будет ли выполнима заданная формула на моделях [18, с. 39, 142] с носителем [1, с. 79–91, 124] мощности 1, 2, 3:

$$\left(\exists x\left(R(x,x)\wedge\left(\exists y\left(\neg R(y,x)\right)\right)\right)\right)$$

Решение состоит в выявлении для соответствующей сколемовской стандартной формы такой подстановки констант, обозначающих элементы носителя, при которой формула будет выполнима.

Ответ: эта формула выполнима на модели мощности 3; эта формула выполнима на модели мощности 2; эта формула не выполнима на модели мощности 1, так как следующая формула является противоречивой:

$$\left(R(a,a)\wedge\left(\neg R(a,a)\right)\right)$$

Упражнения

1 Записать предложения на логическом языке логики предикатов и на графовом логическом языке:

a.

1) сильносвязный граф – орграф, у которого любые две вершины сильно связны;

2) полный граф – граф, в котором любая пара вершин инцидентна единственному ребру.

b.

1) дополнительный граф к графу – граф H называется дополнительным графу G, если он содержит то же множество вершин, что и G, и две вершины смежны H в тогда и только тогда, когда они не смежны в G;

2) висячая вершина – вершина, инцидентная единственному ребру.

c.

1) рёберный граф к графу – граф G называется рёберным графу H, если каждой вершине графа G взаимно однозначно сопоставлено ребро в графе H и две вершины смежны в G тогда и только тогда, когда соответствующие рёбра смежны в H;

2) эксцентриситет вершины x – максимальное расстояние от x до других вершин графа.

d.

1) граф инциденций графа – граф G называется графом инциденций графа H, если каждой вершине и каждому ребру графа H взаимно однозначно сопоставлена вершина в графе G и две вершины смежны в G тогда и только тогда, когда соответствующие элементы (ребро и вершина) смежны в H;

2) обхват графа – длина его минимального цикла.

Библиотека БГУИР

e.

1) окружение графа – длина его самого длинного простого цикла;

2) односторонне связный граф – граф, у которого любая пара вершин односторонне связна.

f.

1) средний диаметр – сумма кратчайших расстояний между всеми парами вершин графа, делённая на число пар вершин;

2) цепь – маршрут, в котором все рёбра различны.

g.

1) простая цепь – цепь, у которой все вершины различны;

2) рёберно-независимые маршруты – множество маршрутов, у которых рёбра различны.

h.

1) цикл – цепь, у которой начальная и конечная вершины совпадают;

2) путь – цепь орграфа, у которой ориентация рёбер в цепи одинакова.

i.

1) эйлерова цепь графа – цепь, содержащая все рёбра графа только один раз;

2) вершинно-независимые маршруты – множество маршрутов, у которых все элементы различны за исключением концевых вершин.

j.

1) гамильтонова цепь графа – простая цепь, которая содержит все вершины графа;

2) независимое множество элементов – множество рёбер или вершин, попарно несмежных.

k.

1) паросочетание – множество рёбер, в котором никакие два ребра не являются смежными;

2) диаметр графа – наибольший из эксцентриситетов его вершин.

l.

1) доминирующее множество вершин – множество вершин таких, что каждая вершина, не принадлежащая ему, смежна с вершиной, принадлежащей множеству;

2) совершенное паросочетание – паросочетание такое, что любая вершина графа инцидентна некоторому ребру этого паросочетания.

m.

1) мост – ребро, для которого существует пара вершин x и y такая, что это ребро принадлежит всем возможным маршрутам из x в y;

Библиотека БГУИР

2) подграф – граф G является подграфом графа H, когда любая вершина или ребро графа G являются соответственно вершиной или ребром графа H.

n.

1) раскраска вершинная – разбиение множества вершин графа такое, что никакие две смежные вершины не попадают в один класс разбиения;
2) маршрут – чередующаяся последовательность вершин и рёбер, обладающая тем свойствам, что любая пара соседних элементов такой последовательности инцидентна.

o.

1) регулярный граф – граф, у которого все вершины имеют одну и ту же степень;
2) раскраска рёберная – разбиение множества рёбер графа такое, что никакие два смежных ребра не попадают в один класс разбиения.

p.

1) полная раскраска – раскраска вершин графа такая, что для любых двух цветов найдутся две смежные вершины, окрашенные в эти цвета;
2) сильнорегулярный граф – регулярный граф, каждая смежная (несмежная) пара вершин которого имеет одинаковое количество соседей.

q.

1) для любого графа либо он сам, либо его дополнение является связным;
2) сумма всех степеней графа – чётное число, равное удвоенному числу рёбер.

r.

1) для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы он не содержал циклов нечётной длины;
2) в каждом турнире существует гамильтонов путь.

s.

1) каждое дерево имеет один или два центра, являющихся смежными вершинами;
2) наибольшее число рёбер у графов, имеющих p вершин и не содержащих треугольников, равно наименьшему целому числу, которое не меньше $p^2/4$.

Библиотека БГУИР

t.

1) для двудольного графа число рёбер в наибольшем паросочетании равно числу вершинного покрытия;

2) граф со степенной последовательностью $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ является гамильтоновым, если для каждого k, удовлетворяющего $1 \le k < n/2$, истинна импликация: $(d_k \le k) \rightarrow (d_{n-k} \ge n-k)$.

u.

1) всякий цикл содержит простой цикл;

2) если связный граф содержит ровно k вершин нечётной степени, то минимальное число покрывающих его рёберно-непересекающихся цепей равно k/2.

v.

1) общее уравнение степени n при $n \ge 5$ неразрешимо в радикалах;

2) для плоского треугольника со сторонами a, b, c и углом α, противолежащему стороне a, справедливо соотношение $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

w.

1) любое множество менее мощно, чем множество его подмножеств;

2) число положительных корней многочлена с вещественными коэффициентами равно числу перемен знаков в ряду его коэффициентов или на чётное число меньше этого числа (нулевые коэффициенты не учитываются).

x.

1) всякое натуральное число можно представить в виде суммы четырех квадратов целых чисел;

2) биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам.

2 Построить сколемовскую стандартную форму для заданных формул:

$$(\forall x(\exists y(\forall z\left(\left(R(x,x)\wedge\left(\left(\neg R(x,y)\right)\wedge\left(R(x,y)\right)\right)\right)\to R(x,z)\right))))$$

$$\left(\exists x\left(\forall y\left(Q(x,x)\wedge\left(\neg Q(x,y)\right)\right)\right)\right)$$

$$\left(\exists x\left(\forall y\left(\left(\neg Q(x,y)\right)\wedge P(x,x)\right)\right)\right)$$

$$\left(\forall x\left(\exists y\left(Q(x,y)\to\forall z R(x,y,z)\right)\right)\right)$$

$$\left(\forall x\left(\exists y\left(P(x)\wedge\left(\neg P(y)\right)\right)\right)\right)$$

$$\left(\forall x\left(\exists y\left(R(x,y)\wedge\left(\neg P(y)\right)\right)\right)\right)$$

Библиотека БГУИР

$$\left(\left(\forall x\left(\exists y Q(x,y)\right)\right)\to\left(\left(\exists y\left(\forall x Q(x,y)\right)\right)\wedge\left(\exists y\left(\forall x\neg Q(x,y)\right)\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(\forall x\left(P(y)\vee Q(y)\right)\right)\to\left(\left(\forall x\left(P(y)\right)\right)\vee\left(\forall x\left(Q(y)\right)\right)\right)\right)$$

$$\neg\left(\left(\forall x\left(\exists y P(x,y)\right)\right)\to\left(\exists y\left(\forall x P(x,y)\right)\right)\right)$$

$$\neg\left(\exists x\forall y\left(P(x,y)\sim\neg\left(\forall z\neg\left(\left(\forall u Q(x,z,u)\right)\to\left(\neg\left(\forall u R(z,u,y)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$\neg\left(\forall x\exists y\left(P(x,y)\sim\neg\left(\forall z\neg\left(\left(\exists u Q(x,z,u)\right)\to\left(\neg\left(\forall u R(z,u,y)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

3 Определить, будут ли выполнимы заданные формулы на моделях с носителем мощности 1, 2 и 3:

$$\left(\left(\exists x\mathrm{R}(x,x)\right)\wedge\left(\forall x\left(\exists y\left(\mathrm{R}(x,y)\wedge\left(\neg\mathrm{R}(y,x)\right)\right)\right)\right)\right)\wedge$$

$$\wedge\left(\forall x\left(\forall y\left(\forall z\left(\left(\neg\mathrm{R}(x,y)\right)\to\neg\left(\mathrm{R}(x,z)\wedge\mathrm{R}(y,z)\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(\exists x\mathrm{R}(x,x)\right)\wedge\left(\forall x\left(\exists y\left(\mathrm{R}(x,y)\wedge\left(\neg\mathrm{R}(y,x)\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$\left(\exists x\left(\exists y\left(\mathrm{R}(x,y)\wedge\left(\neg\mathrm{R}(y,x)\right)\right)\right)\right)\wedge\left(\forall x\left(\forall y\left(\forall z\left(\left(\neg\mathrm{R}(x,y)\right)\to\neg\left(\mathrm{R}(x,z)\wedge\mathrm{R}(y,z)\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$\left(\exists x\left(\exists y\left(\mathrm{R}(x,y)\wedge\left(\neg\mathrm{R}(y,x)\right)\right)\right)\right)\wedge\left(\forall x\left(\forall y\left(\exists z\left(\left(\neg\mathrm{R}(x,y)\right)\to\neg\left(\mathrm{R}(x,z)\wedge\mathrm{R}(y,z)\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$\left(\forall x\left(\forall y\left(\mathrm{R}(x,y)\vee\left(\mathrm{R}(y,x)\right)\right)\right)\right)\wedge\left(\forall x\left(\forall y\left(\exists z\left(\left(\neg\mathrm{R}(x,y)\right)\to\neg\left(\mathrm{R}(x,z)\wedge\mathrm{R}(y,z)\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$\left(\exists x\left(\exists y\left(\neg\mathrm{R}(x,y)\right)\right)\right)\wedge$$

$$\wedge\left(\forall x\left(\forall y\left(\mathrm{R}(x,y)\vee\left(\mathrm{R}(y,x)\right)\right)\right)\right)\wedge\left(\forall x\left(\forall y\left(\forall z\left(\left(\neg\mathrm{R}(x,y)\right)\to\neg\left(\mathrm{R}(x,z)\wedge\mathrm{R}(y,z)\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(\exists x\mathrm{R}(x,x)\right)\wedge\left(\forall x\left(\forall y\left(\mathrm{R}(x,y)\wedge\mathrm{R}(y,x)\right)\right)\right)\right)\wedge$$

$$\wedge\left(\forall x\left(\forall y\left(\forall z\left(\left(\neg\mathrm{R}(x,y)\right)\to\neg\left(\mathrm{R}(x,z)\wedge\mathrm{R}(y,z)\right)\right)\right)\right)\right)$$

Исчисление предикатов

Аксиоматика

Рассмотрим аксиоматику исчисления предикатов, которая основывается на аксиоматике исчисления высказываний, используя все аксиомные схемы исчисления высказываний применительно к формулам языка логики предикатов, а также используя две следующие дополнительные аксиомные схемы для кванторов.

Здесь формула α, имеющая свободное вхождение переменной χ, обозначена как $\alpha(\chi)$. Формула $\alpha(\chi)$ не имеет свободных вхождений τ. Формула $\alpha(\tau)$ получена заменой всех свободных вхождений переменной χ на τ.

Библиотека БГУИР

Таблица 25 – Аксиомные схемы исчисления предикатов первого порядка

	Введение	Удаление
$\forall$		$\left(\left(\forall\chi\alpha(\chi)\right)\to\alpha(\tau)\right)$
$\exists$	$\left(\alpha(\chi)\to\left(\exists\chi\alpha(\chi)\right)\right)$	

Правила вывода

Кроме правила прямого заключения в логике предикатов используются ещё два правила вывода.

Для любого множества формул $\mathfrak{G}$ языка логики предикатов, для любых формул $\alpha(\chi)$ и $\beta(\chi)$, содержащих свободную переменную χ, и любой формулы γ, которая не содержит свободной переменной χ, справедливы следующие правила (правило обобщения и конкретизации соответственно).

$$\left(\left(\mathfrak{G}\cup\left\{\left(\gamma\to\beta(\chi)\right)\right\}\right)\vdash\left(\mathfrak{G}\cup\left\{\left(\gamma\to\left(\forall\chi\beta(\chi)\right)\right)\right\}\right)\right)$$

$$\left(\left(\mathfrak{G}\cup\left\{\left(\alpha(\chi)\to\gamma\right)\right\}\right)\vdash\left(\mathfrak{G}\cup\left\{\left(\left(\exists\chi\alpha(\chi)\right)\to\gamma\right)\right\}\right)\right)$$

Наряду с этими правилами и, исходя из них как метатеоремы могут быть получены следующие правила вывода:

$$\left(\left(\mathfrak{G}\cup\left\{\beta(\chi)\right\}\right)\vdash\left(\mathfrak{G}\cup\left\{\left(\forall\chi\beta(\chi)\right)\right\}\right)\right)$$

Таблица 26 – Правила вывода исчисления предикатов

	Введение	Удаление
$\forall$	$\left(\left(\mathfrak{G}\cup\left\{\left(\gamma\to\beta(\chi)\right)\right\}\right)\vdash\left(\mathfrak{G}\cup\left\{\left(\gamma\to\left(\forall\chi\beta(\chi)\right)\right)\right\}\right)\right)$	$\left(\left(\mathfrak{G}\cup\left\{\left(\forall\chi\alpha(\chi)\right)\right\}\right)\vdash\left(\mathfrak{G}\cup\left\{\alpha(\tau)\right\}\right)\right)$
$\exists$	$\left(\left(\mathfrak{G}\cup\left\{\alpha(\chi)\right\}\right)\vdash\left(\mathfrak{G}\cup\left\{\left(\exists\chi\alpha(\chi)\right)\right\}\right)\right)$	$\left(\left(\mathfrak{G}\cup\left\{\left(\alpha(\chi)\to\gamma\right)\right\}\right)\vdash\left(\mathfrak{G}\cup\left\{\left(\left(\exists\chi\alpha(\chi)\right)\to\gamma\right)\right\}\right)\right)$

Примеры заданий

Задание: доказать заданную формулу:

$$\left(\left(\forall x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\to\left(\left(\forall yP(y)\right)\wedge\left(\forall yQ(y)\right)\right)\right)$$

Решение состоит в последовательной записи формул, формирующих вывод.

Ответ:

$1:\langle-\forall\rangle\left(\left(\forall x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\to\left(P(y)\wedge Q(y)\right)\right)$

$2:\langle-\wedge\rangle\left(\left(P(y)\wedge Q(y)\right)\to P(y)\right)$

$3:\langle-\wedge\rangle\left(\left(P(y)\wedge Q(y)\right)\to Q(y)\right)$

$4:\langle+\to\rangle\left(\left(\left(P(y)\wedge Q(y)\right)\to P(y)\right)\to\left(\left(\forall x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\to\left(\left(P(y)\wedge Q(y)\right)\to P(y)\right)\right)\right)$

$5:\langle+\to\rangle\left(\left(\left(P(y)\wedge Q(y)\right)\to Q(y)\right)\to\left(\left(\forall x\left(P(x)\wedge Q(x)\right)\right)\to\left(\left(P(y)\wedge Q(y)\right)\to Q(y)\right)\right)\right)$

Библиотека БГУИР

$$6:\langle 2,4\rangle\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\big(\big(P(y)\wedge Q(y)\big)\rightarrow P(y)\big)\Big)$$

$$7:\langle 3,5\rangle\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\big(\big(P(y)\wedge Q(y)\big)\rightarrow Q(y)\big)\Big)$$

$$8:\langle -\rightarrow\rangle\Big(\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\big(P(y)\wedge Q(y)\big)\Big)\rightarrow$$
$$\Big(\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\big(\big(P(y)\wedge Q(y)\big)\rightarrow P(y)\big)\Big)\rightarrow\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow P(y)\Big)\Big)\Big)$$

$$9:\langle -\rightarrow\rangle\Big(\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\big(P(y)\wedge Q(y)\big)\Big)\rightarrow$$
$$\Big(\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\big(\big(P(y)\wedge Q(y)\big)\rightarrow Q(y)\big)\Big)\rightarrow\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow Q(y)\Big)\Big)\Big)$$

$$10:\langle 1,8\rangle\Big(\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\big(\big(P(y)\wedge Q(y)\big)\rightarrow P(y)\big)\Big)\rightarrow\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow P(y)\Big)\Big)$$

$$11:\langle 1,9\rangle\Big(\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\big(\big(P(y)\wedge Q(y)\big)\rightarrow Q(y)\big)\Big)\rightarrow\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow Q(y)\Big)\Big)$$

$$12:\langle 6,10\rangle\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow P(y)\Big)$$

$$13:\langle 7,11\rangle\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow Q(y)\Big)$$

$$14:\langle \forall,12\rangle\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\big(\forall yP(y)\big)\Big)$$

$$15:\langle \forall,13\rangle\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\big(\forall yQ(y)\big)\Big)$$

$$16:\langle +\wedge\rangle\Big(\big(\forall yP(y)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yQ(y)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yP(y)\big)\wedge\big(\forall yQ(y)\big)\Big)\Big)\Big)$$

$$17:\langle +\rightarrow\rangle\Big(\Big(\big(\forall yP(y)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yQ(y)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yP(y)\big)\wedge\big(\forall yQ(y)\big)\Big)\Big)\Big)\rightarrow$$
$$\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yP(y)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yQ(y)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yP(y)\big)\wedge\big(\forall yQ(y)\big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)$$

$$18:\langle 16,17\rangle\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yP(y)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yQ(y)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yP(y)\big)\wedge\big(\forall yQ(y)\big)\Big)\Big)\Big)\Big)$$

$$19:\langle -\rightarrow\rangle\Big(\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\big(\forall yP(y)\big)\Big)\rightarrow$$
$$\Big(\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yP(y)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yQ(y)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yP(y)\big)\wedge\big(\forall yQ(y)\big)\Big)\Big)\Big)\Big)\rightarrow$$
$$\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yQ(y)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yP(y)\big)\wedge\big(\forall yQ(y)\big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)$$

$$20:\langle 14,19\rangle\Big(\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yP(y)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yQ(y)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yP(y)\big)\wedge\big(\forall yQ(y)\big)\Big)\Big)\Big)\Big)\rightarrow$$
$$\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yQ(y)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yP(y)\big)\wedge\big(\forall yQ(y)\big)\Big)\Big)\Big)\Big)$$

$$21:\langle 18,20\rangle\Big(\big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yQ(y)\big)\rightarrow\Big(\big(\forall yP(y)\big)\wedge\big(\forall yQ(y)\big)\Big)\Big)\Big)$$

Библиотека БГУИР

$$22:\langle -\to\rangle\Big(\Big(\Big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\Big)\to\big(\forall yQ(y)\big)\Big)\to$$

$$\Big(\Big(\Big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\Big)\to\Big(\big(\forall yQ(y)\big)\to\Big(\big(\forall yP(y)\big)\wedge\big(\forall yQ(y)\big)\Big)\Big)\Big)\to$$

$$\Big(\Big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\Big)\to\Big(\big(\forall yP(y)\big)\wedge\big(\forall yQ(y)\big)\Big)\Big)\Big)\Big)$$

$$23:\langle 15,22\rangle\Big(\Big(\Big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\Big)\to\Big(\big(\forall yQ(y)\big)\to\Big(\big(\forall yP(y)\big)\wedge\big(\forall yQ(y)\big)\Big)\Big)\Big)\to$$

$$\Big(\Big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\Big)\to\Big(\big(\forall yP(y)\big)\wedge\big(\forall yQ(y)\big)\Big)\Big)\Big)$$

$$24:\langle 21,23\rangle\Big(\Big(\forall x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)\Big)\to\Big(\big(\forall yP(y)\big)\wedge\big(\forall yQ(y)\big)\Big)\Big)$$

В данном примере $\langle -\to\rangle$ означает, что для получения формул 8, 9, 19, 22 используется аксиомная схема удаления импликации; $\langle +\to\rangle$ означает, что для получения формулы 17 используется аксиомная схема введения импликации, $\langle -\forall\rangle$ – для формулы 1 используется аксиомная схема удаления квантора общности, $\langle 2,4\rangle$ – формула 6 получена по правилу вывода Modus Ponens (правилу прямого заключения) из формул 2 и 4, $\langle \forall,12\rangle$ – формула 14 получена по правилу обобщения из формулы 12 и т. д.

Задание: проверить систему формул на непротиворечивость методом резолюций:

$$\begin{cases}\big(\forall xP(x)\big)\\ \big(\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)\big)\\ \big(\neg\big(\exists x\big(Q(x)\wedge R(x)\big)\big)\big)\\ \big(\exists x\big(R(x)\sim P(x)\big)\big)\end{cases}$$

Решение:

$1:\big(\forall xP(x)\big)$

$2:\big(\forall x\big(P(x)\to Q(x)\big)\big)$

$3:\big(\neg\big(\exists x\big(Q(x)\wedge R(x)\big)\big)\big)$

$4:\big(\exists x\big(R(x)\sim P(x)\big)\big)$

$5:\langle 1\rangle P(x)$

$6:\langle 2\rangle\big((\neg P(x))\vee Q(x)\big)$

$7:\langle 3\rangle\big((\neg Q(x))\vee(\neg R(x))\big)$

$8:\langle 4\rangle\big(R(a)\to P(a)\big)$

$9:\langle 5\rangle\big(P(a)\to R(a)\big)$

$10:\langle 8\rangle\big((\neg R(a))\vee P(a)\big)$

Библиотека БГУИР

$11:\langle 9\rangle ((\neg P(a))\vee R(a))$

$12:\langle 5,11\rangle R(a)$

$13:\langle 12,7\rangle (\neg Q(a))$

$14:\langle 13,6\rangle (\neg P(a))$

$15:\langle 14,5\rangle \perp$

Ответ: система формул противоречива.

В данном примере $\langle 1\rangle$ означает, что формула 5 получена равносильным преобразованием из формулы 1, $\langle 2\rangle$ – формула 6 получена равносильным преобразованием из формулы 3, $\langle 5,11\rangle$ – формула 12 является резольвентой формул 5 и 11 и т. д.

Упражнения

1 Доказать заданные формулы:

$((\forall x P(x))\to(\exists x P(x)))$

$((\exists x Q(x,x))\to(\exists x(\exists y Q(x,y))))$

$((\exists x P(x))\to(\neg(\forall x P(x))))$

$((\neg(\exists x P(x)))\to(\forall x P(x)))$

$((\exists x(P(x)\vee R(x)))\to((\exists x P(x))\vee(\exists x R(x))))$

$((\forall x(\forall y Q(x,y)))\to(\forall y(\forall x Q(x,y))))$

$((\forall x(\forall y Q(x,y)))\to(\exists x Q(x,x)))$

2 Проверить систему формул на непротиворечивость методом резолюций:

$$\begin{cases}(\neg(\forall x(A(x)\sim B(x))))\\(\forall x(A(x)\to B(x)))\\(\exists x(B(x)\to A(x)))\\(\exists x(A(x)\wedge(\neg B(x))))\\(\forall x((\neg B(x))\to(\neg A(x))))\end{cases}\qquad\begin{cases}(\neg(\exists x(A(x)\vee B(x))))\\(\forall x(A(x)\wedge B(x)))\\(\exists x(A(x)\sim(\neg B(x))))\\(\exists x(A(x)\wedge B(x)))\\(\forall x((\neg B(x))\wedge(\neg A(x))))\end{cases}$$

Библиотека БГУИР

$$\begin{cases}\left(\neg\left(\exists x\left(A(x)\vee\left(\neg B(x)\right)\right)\right)\right)\\ \left(\exists x\left(B(x)\to A(x)\right)\right)\\ \left(\forall x\left(B(x)\wedge A(x)\right)\right)\\ \left(\exists x\left(A(x)\vee B(x)\right)\right)\\ \left(\forall x\left(A(x)\sim B(x)\right)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\neg\left(\forall x\left(A(x)\sim\left(\neg B(x)\right)\right)\right)\right)\\ \left(\forall x\left(A(x)\vee B(x)\right)\right)\\ \left(\exists x\left(\left(\neg A(x)\right)\vee\left(\neg B(x)\right)\right)\right)\\ \left(\forall x\left(B(x)\to\left(\neg A(x)\right)\right)\right)\\ \left(\forall x\left(B(x)\sim\left(\neg A(x)\right)\right)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\neg\left(\forall x\left(A(x)\wedge B(x)\right)\right)\right)\\ \left(\exists x\left(A(x)\sim B(x)\right)\right)\\ \left(\exists x\left(A(x)\to B(x)\right)\right)\\ \left(\exists x\left(B(x)\to A(x)\right)\right)\\ \left(\exists x\left(A(x)\vee B(x)\right)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\neg\left(\forall x\left(S(x)\to\left(\neg P(x)\right)\right)\right)\right)\\ \left(\forall x\left(P(x)\to\left(\neg S(x)\right)\right)\right)\\ \left(\exists x\left(S(x)\wedge\left(\neg P(x)\right)\right)\right)\\ \left(\exists x\left(P(x)\wedge\left(\neg S(x)\right)\right)\right)\end{cases}$$

Логическое программирование

Метод резолюций

Метод резолюций [2, с. 41 – 80] является одним из методов, для которого существуют эффективные алгоритмы логического вывода в различных системах логического программирования. В основе метода резолюций лежит правило резолюции $\left(\left(\mathfrak{S}\cup\{(\alpha\vee\gamma)\}\cup\{(\beta\vee(\neg\gamma))\}\right)\vdash\left(\mathfrak{S}\cup\{(\alpha\vee\beta)\}\right)\right)$. Прежде чем применять резолюцию в логике предикатов необходимо произвести преобразование формул так, чтобы аргументы предикатов стали идентичны, т. е. произвести унификацию предикатов. С этой целью в логике предикатов выделяют операцию унификации [2, с. 44, 45].

Рассмотрим пример проведения операции унификации для формул

$$P(X,Y,X,W,a,b)$$

$$\left(\neg P(U,V,Z,Z,V,c)\right)$$

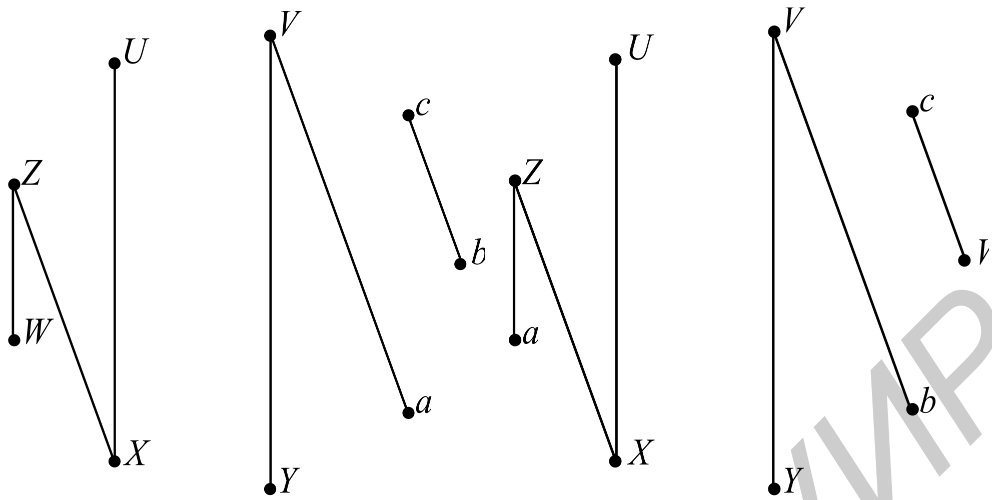
и пример для формул

$$P(X,Y,X,a,b,W)$$

$$\left(\neg P(U,V,Z,Z,V,c)\right).$$

Соответственно графически можно изобразить унификацию для этих приме-

Библиотека БГУИР



ров.

Рисунок 2 – Графы унификаторов переменных и констант логических формул

Здесь по три компоненты связности: в первом случае унификация невозможна, так как одна из компонент содержит две различные константы, во втором случае унификация возможна, так как каждая компонента связности содержит не более одной константы.

Следовательно, первая пара формул не унифицируется, тогда как вторая унифицируется к следующему результату:

$$P(a,b,a,a,b,c)$$

$$(\neg P(a,b,a,a,b,c))$$

Операция унификации

Приведём описание алгоритма операции унификации.

функция $Unify(\langle\tau_1,\tau_2\rangle)$**;**

если термы τ_1 и τ_2 равны ($\tau_1=\tau_2$), **то** $\sigma_0 := \{\langle\tau_1,\tau_2\rangle\}$**;**

если τ_1 есть переменная ($Var(\tau_1)=\top$), **то** $\sigma_0 := \{\langle\tau_1,\tau_2\rangle,\langle\tau_2,\tau_2\rangle\}$**;**

если τ_2 есть переменная ($Var(\tau_2)=\top$), **то** $\sigma_0 := \{\langle\tau_2,\tau_1\rangle,\langle\tau_1,\tau_1\rangle\}$**;**

если τ_1 и τ_2 есть функциональные термы ($Functional(\tau_1)\wedge Functional(\tau_2)=\top$), **то**

если имена (функций) и число аргументов в термах τ_1 и τ_2 совпадают ($(Name(\tau_1)=Name(\tau_2))\wedge(Ariety(\tau_1)=Ariety(\tau_2))=\top$), **то**

начать цикл для i **от** 1 **до** $Ariety(\tau_1)$

если i-е аргументы термов τ_1 и τ_2 не равны ($(Argument(\langle\tau_1,i\rangle)=Argument(\langle\tau_2,i\rangle))=\bot$), **то** унифицировать пару i-х аргументов термов τ_1 и τ_2

Библиотека БГУИР

$\sigma_1 := Unify\left(\left\langle Argument\left(\langle \tau_1, i\rangle\right), Argument\left(\langle \tau_2, i\rangle\right)\right\rangle\right) \cup$

$\cup \left\{\langle x, x\rangle \middle| \left(\left(x = Argument\left(\langle \tau_1, k\rangle\right)\right) \vee \left(x = Argument\left(\langle \tau_2, k\rangle\right)\right)\right) \wedge (k \neq i)\right\}$

если $\sigma_1 \neq \varnothing$, **то** унифицировать результат унификации с помощью унификатора σ_1 термов τ_1 и τ_2

$\sigma_2 := Unify\left(\left\langle Substitution\left(\langle \sigma_1, \tau_1\rangle\right), Substitution\left(\langle \sigma_1, \tau_2\rangle\right)\right\rangle\right)$

если $\sigma_2 \neq \varnothing$, **то** $\sigma_0 := \sigma_1 \circ \sigma_2$

иначе $\sigma_0 := \varnothing$

иначе $\sigma_0 := \varnothing$

прервать цикл

если $i = Ariety(\tau_1)$, **то** $\sigma_0 := \left\{\langle x, x\rangle \middle| \left(\left(x = Argument\left(\langle \tau_1, k\rangle\right)\right) \vee \left(x = Argument\left(\langle \tau_2, k\rangle\right)\right)\right)\right\}$

завершить цикл
иначе $\sigma_0 := \varnothing$
иначе $\sigma_0 := \varnothing$**;**
возвратить унификатор σ_0 в качестве значения функции**;**
конец.

Операция обратного логического вывода

Приведём описание алгоритма операции обратного логического вывода.

функция $Inference\left((\neg\alpha_1) \vee (\neg\alpha_2) \vee \ldots \vee (\neg\alpha_n)\right)$**;**

начать цикл для всех выражений $\alpha_0 \vee (\neg\beta_1) \vee (\neg\beta_2) \vee \ldots \vee (\neg\beta_k)$ в базе знаний

унифицировать $\sigma := Unify\left(\langle \alpha_0, \alpha_1\rangle\right)$**;**

если $\sigma \neq \varnothing$, **то**

если резольвента пустая $(\neg\alpha_2) \vee \ldots \vee (\neg\alpha_n) \vee (\neg\beta_1) \vee (\neg\beta_2) \vee \ldots \vee (\neg\beta_k) = \bot$, **то** **вывести** в качестве результата унификатор σ

иначе рекурсивно логически вывести результат унификации с помощью унификатора σ полученной резольвенты $Inference\left(Substitution\left(\left\langle \sigma, (\neg\alpha_2) \vee \ldots \vee (\neg\alpha_n) \vee (\neg\beta_1) \vee (\neg\beta_2) \vee \ldots \vee (\neg\beta_k)\right\rangle\right)\right)$**;**

завершить цикл;
конец.

Языки логического программирования

Примеры программ

Задание: проверить вывод [16, с. 298] методом резолюций:

Библиотека БГУИР

1 Ни одна птица, кроме страуса, не достигает 9 футов роста.
2 В этом птичнике нет птиц, которые принадлежали бы кому-нибудь, кроме меня.
3 Ни один страус не питается пирогами с начинкой.
4 У меня нет птиц, которые не достигали бы 9 футов роста.
5 Вывод: ни одна птица в этом птичнике не питается пирогами с начинкой.

Решение:

Введём обозначения: $H(x,y)$ – x достигает y футов роста, $B(x)$ – быть птицей, $S(x)$ – быть страусом, $F(x)$ – быть в этом птичнике, $M(x)$ – принадлежать мне, $P(x)$ – питаться пирогами с начинкой.

$1:\left(\neg\left(\exists x\left(B(x)\wedge\left(H(x,9)\sim\left(\neg S(x)\right)\right)\right)\right)\right)$

$2:\left(\neg\left(\exists x\left(\left(F(x)\wedge B(x)\right)\wedge\left(\neg M(x)\right)\right)\right)\right)$

$3:\left(\neg\left(\exists x\left(P(x)\wedge S(x)\right)\right)\right)$

$4:\left(\neg\left(\exists x\left(M(x)\wedge\left(\neg H(x,9)\right)\right)\right)\right)$

$5:\left(\neg\left(\neg\left(\exists x\left(F(x)\wedge P(x)\wedge B(x)\right)\right)\right)\right)$

$6:\langle 1\rangle\left(\left(\neg B(x)\right)\vee\left(H(x,9)\sim S(x)\right)\right)$

$7:\langle 2\rangle\left(\left(\left(\neg F(x)\right)\vee\left(\neg B(x)\right)\right)\vee M(x)\right)$

$8:\langle 3\rangle\left(\left(\neg P(x)\right)\vee\left(\neg S(x)\right)\right)$

$9:\langle 4\rangle\left(\left(\neg M(x)\right)\vee H(x,9)\right)$

$10:\langle 6\rangle\left(\left(\neg B(x)\right)\vee\left(\left(\neg H(x,9)\right)\vee S(x)\right)\right)$

$11:\langle 6\rangle\left(\left(\neg B(x)\right)\vee\left(H(x,9)\vee\left(\neg S(x)\right)\right)\right)$

$12:\langle 5\rangle F(a)$

$13:\langle 5\rangle P(a)$

$14:\langle 5\rangle B(a)$

$15:\langle 14,10\rangle\left(\left(\neg H(a,9)\right)\vee S(a)\right)$

$16:\langle 14,11\rangle\left(H(a,9)\vee\left(\neg S(a)\right)\right)$

$17:\langle 12,7\rangle\left(\left(\neg B(a)\right)\vee M(a)\right)$

$18:\langle 13,8\rangle\left(\neg S(a)\right)$

Библиотека БГУИР

$19:\langle 18,15\rangle\left(\neg H\left(a,9\right)\right)$

$20:\langle 14,17\rangle M\left(a\right)$

$21:\langle 20,9\rangle H\left(a,9\right)$

$22:\langle 21,19\rangle \perp$

Ответ: вывод верен.

Задание: запрограммировать решение задачи о том, чтобы с помошью двух сосудов на 3 литра и 5 литров отлить ровно половину из полностью наполненного водой третьего сосуда на 8 литров.

Решение состоит в формализации постановки задачи и формировании базы знаний в виде программы на логическом языке программирования, в данном случае – на объектном расширении языка Prolog (Visual Prolog) [2, с. 54 – 80; 17].

Ответ:

```
class water : water
        open core

domains
        количество = integer.
        состояние = н(количество, количество, количество).
        состояния = состояние*.

predicates
ёмкости : (количество,количество,количество) procedure (o,o,o).
минимум : (количество,количество,количество) procedure (i,i,o).
является_элементом : (состояние,состояния) determ.
не_является_элементом : (состояние,состояния) determ.
кратч_решение : (состояние,состояние,состояния) nondeterm (i,i,o).
перелить : (состояние,состояние,состояния,состояния) nondeterm (i,i,i,o) (i,i,i,i).
переход : (состояние,состояние) nondeterm (i,o).
вывести_лист : (состояния).
вывести_действия : (состояния) nondeterm.
вывести_действие : (состояние,состояние) nondeterm.
вывести_состояние : (состояние).
длина : (состояния, integer) nondeterm (i,o).
короче : (состояние,состояние,integer) determ.

predicates
инверсные_списки:(состояния, состояния) nondeterm (i, o) (i,i).
инверсия:(состояния, состояния, состояния) nondeterm (i, i, o) (i,i,i).
добавить_в_очередь:(состояния, состояние, состояния) nondeterm (i,i,o).

predicates
        recast: ().
                classInfo : core::classInfo.
                % @short Class information  predicate.
                % @detail This predicate represents information predicate of this class.
                % @end
predicates
        run : core::runnable.

end class water
```

```
	% реализация
implement water
	open core

clauses
	ёмкости(8,5,3).

	является_элементом(А,[А|_]):- !.
	является_элементом(А,[_|Б]):-
		является_элементом(А,Б).

	не_является_элементом(А,Б):-
		not(является_элементом(А,Б)).

	минимум(А,Б,А):-
		А < Б,
		!.
	минимум(_,Б,Б).

	длина([],0).
	длина([_|А],Л):-
		длина(А,Длинахвоста),
		Л=Длинахвоста+1.

	короче(Старт,Финиш,Л):-
		перелить(Старт,Финиш,[],Пройденные),
		длина(Пройденные,Л1),
		Л1 < Л,
		!.

	кратч_решение(Старт,Финиш,Решение):-
		перелить(Старт,Финиш,[],Решение),
		длина(Решение,Л),
		not(короче(Старт,Финиш,Л)).

	перелить(Финиш,Финиш,Решение,Решение).
	перелить(Старое,Финиш,Пройденные,Решение):-
		not(Старое=Финиш),
		переход(Старое,Новое),
		не_является_элементом(Новое, Пройденные),
		перелить(Новое,Финиш,[Новое|Пройденные],Решение).

	переход(н(В_первом, Во_втором, В_третьем),
		н(Стало_в_первом, Стало_во_втором, В_третьем)):-
		ёмкости(Первая, Вторая, _Третья), Первая>0,
		Свободно = Вторая - Во_втором, Свободно>0,
		минимум(В_первом,Свободно,Количество),
		Стало_в_первом = В_первом- Количество,
		Стало_во_втором = Во_втором + Количество.

	переход(н(В_первом, Во_втором, В_третьем),
		н(Стало_в_первом, Стало_во_втором, В_третьем)):-
		ёмкости(Первая, _Вторая, Третья), Первая>0,
		Свободно = Третья - В_третьем, Свободно>0,
		минимум(В_первом,Свободно,Количество),
		Стало_в_первом = В_первом- Количество,
		Стало_в_третьем = В_третьем + Количество.
```


Библиотека БГУИР

```
переход(н(В_первом, Во_втором, В_третьем),
        н(Стало_в_первом, Стало_во_втором, В_третьем)):-
        ёмкости(Первая, Вторая, _Третья), Вторая>0,
        Свободно = Первая - В_первом, Свободно>0,
        минимум(Во_втором,Свободно,Количество),
        Стало_во_втором = Во_втором - Количество,
        Стало_в_первом = В_первом + Количество.

переход(н(В_первом, Во_втором, В_третьем),
        н(Стало_в_первом, Стало_во_втором, В_третьем)):-
        ёмкости(_Первая, Вторая, Третья), Вторая>0,
        Свободно = Третья - В_третьем, Свободно>0,
        минимум(Во_втором,Свободно,Количество),
        Стало_во_втором = Во_втором - Количество,
        Стало_в_третьем = В_третьем + Количество.

переход(н(В_первом, Во_втором, В_третьем),
        н(Стало_в_первом, Стало_во_втором, В_третьем)):-
        ёмкости(Первая, _Вторая, Третья), Третья>0,
        Свободно = Первая - В_первом, Свободно>0,
        минимум(В_третьем,Свободно,Количество),
        Стало_в_третьем = В_третьем - Количество,
        Стало_в_первом = В_первом + Количество.

переход(н(В_первом, Во_втором, В_третьем),
        н(Стало_в_первом, Стало_во_втором, В_третьем)):-
        ёмкости(_Первая, Вторая, Третья), Третья>0,
        Свободно = Вторая - Во_втором, Свободно>0,
        минимум(В_третьем,Свободно,Количество),
        Стало_в_третьем = В_третьем - Количество,
        Стало_во_втором = Во_втором + Количество.

инверсия([], L, L) :- !.
инверсия([H|T], L1, L) :- инверсия(T, [H|L1], L).
инверсные_списки(L, R) :- инверсия(L, [], R).

добавить_в_очередь(L, E, R) :-
        инверсные_списки(L, T), инверсные_списки([E|T], R).

вывести_состояние(н(А,Б,В)):-
        console::write("(",А,",",Б,",",В,").\n").

вывести_действия([]).
вывести_действия([А|[Б|В]]):-
        вывести_действия([Б|В]),
        вывести_действие(Б, А).
вывести_действия([_]).

вывести_действие(н(В_первом,Во_втором,_),
        н(Стало_в_первом,Стало_во_втором,Стало_в_третьем)):-
        В_первом>Стало_в_первом,
        Во_втором<Стало_во_втором,
        Перелито=В_первом - Стало_в_первом,
        console::write("Из первого сосуда отлили объём, равный ",
        Перелито,
        " во второй сосуд,",
        " получили следующие объёмы в сосудах "),
```

```
        вывести_состояние(
            н(Стало_в_первом,
            Стало_во_втором,
            Стало_в_третьем)).

вывести_действие(н(В_первом,_,В_третьем),
        н(Стало_в_первом,Стало_во_втором,Стало_в_третьем)):-
        В_первом>Стало_в_первом,
        В_третьем<Стало_в_третьем,
        Перелито=В_первом-Стало_в_первом,
        console::write("Из первого сосуда отлили объём, равный ",
        Перелито,
        " в третий сосуд,",
        " получили следующие объёмы в сосудах "),
        вывести_состояние(
            н(Стало_в_первом,
            Стало_во_втором,
            Стало_в_третьем)).

вывести_действие(н(В_первом,Во_втором,_),
        н(Стало_в_первом,Стало_во_втором,Стало_в_третьем)):-
        Во_втором>Стало_во_втором,
        В_первом<Стало_в_первом,
        Перелито=Во_втором-Стало_во_втором,
        console::write("Из второго сосуда отлили объём, равный ",
        Перелито,
        " в первый сосуд,",
        " получили следующие объёмы в сосудах "),
        вывести_состояние(
            н(Стало_в_первом,
            Стало_во_втором,
            Стало_в_третьем)).

вывести_действие(н(_,Во_втором,В_третьем),
        н(Стало_в_первом,Стало_во_втором,Стало_в_третьем)):-
        Во_втором>Стало_во_втором,
        В_третьем<Стало_в_третьем,
        Перелито=Во_втором-Стало_во_втором,
        console::write("Из второго сосуда отлили объём, равный ",
        Перелито,
        " в третий сосуд,",
        " получили следующие объёмы в сосудах "),
        вывести_состояние(
            н(Стало_в_первом,
            Стало_во_втором,
            Стало_в_третьем)).

вывести_действие(н(В_первом,_,В_третьем),
        н(Стало_в_первом,Стало_во_втором,Стало_в_третьем)):-
        В_третьем>Стало_в_третьем,
        В_первом<Стало_в_первом,
        Перелито=В_третьем-Стало_в_третьем,
        console::write("Из третьего сосуда отлили объём, равный ",
        Перелито,
        " в первый сосуд,",
        " получили следующие объёмы в сосудах "),
        вывести_состояние(
```

Библиотека БГУИР

```
                    н(Стало_в_первом,
                    Стало_во_втором,
                    Стало_в_третьем)).

    вывести_действие(н(_,Во_втором,В_третьем),
            н(Стало_в_первом,Стало_во_втором,Стало_в_третьем)):-
            В_третьем>Стало_в_третьем,
            Во_втором<Стало_во_втором,
            Перелито=В_третьем-Стало_в_третьем,
            console::write("Из третьего сосуда отлили объём, равный ",
            Перелито,
            " во второй сосуд,",
            " получили следующие объёмы в сосудах "),
            вывести_состояние(
                    н(Стало_в_первом,
                    Стало_во_втором,
                    Стало_в_третьем)).

    recast():-
            Старт=н(8,0,0), Финиш=н(4,4,0),
            кратч_решение(Старт,Финиш,Решение),
            добавить_в_очередь(Решение,Старт,Протокол),
            console::write("Было "),
            вывести_состояние(Старт),
            вывести_действия(Протокол),
            !.
    recast():-console::write("Решение не найдено.\n").

constants
    className = "water".
    classVersion = "".

clauses
    classInfo(className, classVersion).
    run():-
            console::init(), recast(),
            succeed(). % place your own code here

end implement water

goal
    mainExe::run(water::run).
```

Упражнения

1 Проверить следующие рассуждения [1] методом резолюций:

a. Все первокурсники встречаются со всеми второкурсниками. Ни один первокурсник не встречается ни с одним студентом предпоследнего курса. Существуют первокурсники. Следовательно, ни один второкурсник не является студентом предпоследнего курса.

b. Всякий обычный ученик должен иметь возможность понять данный школьный учебник. Ни один обычный ученик не может понять данный школьный учебник. Значит, данный школьный учебник недоступен обычному ученику.

c. Ни один человек не является четвероногим. Все студенты – люди. Следовательно, ни один студент не является четвероногим.
d. Каждый член комитета студент и активист. Некоторые члены комитета – женщины. Следовательно, существуют женщины-активистки.
e. Ни один торговец наркотиками не является наркоманом. Некоторые наркоманы привлекаются к ответственности. Следовательно, некоторые люди, привлекавшиеся к ответственности, не являются торговцами наркотиками.
f. Все рациональные числа являются действительными числами. Некоторые рациональные числа – целые. Следовательно, некоторые действительные числа – целые числа.
g. Все целые числа – рациональные, n – целое число. Следовательно, n – рациональное число.
h. Глупец был бы способен на это. Я на это не способен. Значит, я не глупец.

2 Запрограммировать решение следующие задачи:

a. Два берега реки. На одном из берегов есть три миссионера и три людоеда, необходимо с помощью лодки, вмещающий не более двух человек, переправить всех на другой берег. Число присутствующих миссионеров на берегу и в лодке должно быть всегда больше числа людоедов.
b. Два берега реки. На одном из них человек, несёт капусту, ведёт козу и пойманного волка. Необходимо с помощью лодки, вмещающей вместе с человеком не более одного животного или предмета, переправиться на другой берег. Человек не может оставлять козу с капустой и волка с козой.
c. Два берега реки. На одном из берегов есть три семейные пары, необходимо с помощью лодки, вмещающий не более двух человек, переправить всех на другой берег. Нельзя оставлять чужую жену и чужого мужа вместе без супругов.
d. Обезьяна сидит в клетке, в центре под потолком висит банан, который можно достать, взяв палку и встав на подставленный ящик. Ящик и палка находятся в углу клетки, обезьяна – в другом углу. Обезьяна может двигать ящик, брать палку и сбивать палкой в руке банан при достаточной высоте.
e. Расставить на шахматной доске пять ферзей так, чтобы все свободные клетки оказались под боем одного из ферзей.
f. Расставить на шахматной доске восемь ферзей так, чтобы ни один ферзь не находился под боем другого ферзя.

Библиотека БГУИР

Прикладные логики и правдоподобные рассуждения

Неклассический логический вывод

Одним из примеров неклассического логического вывода является вывод по аналогии [3, с. 13, 529].

Правило прямого вывода (заключения) по аналогии формально может выглядеть так:

$$\left(\left(\left(\mathfrak{G}\cup\{\alpha,\varphi(\alpha,\beta)\}\right)\vdash\left(\mathfrak{G}\cup\{\beta\}\right)\right)\rightarrow\left(\left(\mathfrak{G}\cup\{\sigma(\alpha,\lambda),\sigma(\varphi(\alpha,\beta),\psi(\lambda,\gamma)),\sigma(\beta,\gamma),\alpha,\varphi,\lambda\}\right)\vdash\left(\mathfrak{G}\cup\{\gamma\}\right)\right)\right),$$

здесь σ – бинарное отношение подобия на множестве термов и формул.

Алгоритмизация вывода по аналогии

Рассмотрим конкретный пример. Для представления данных будем использовать следующие структуры.

Таблица 27 – Структуры для описания связок (кортежей) предикатов и отношений

Поле	Значение	Тип
1	имя предиката	строка
2	список аргументов	вектор строк

Таблица 28 – Структура формул для фактов и правил базы знаний

Поле	Значение	Тип
1	список предикатов	вектор отношений

Таблица 29 – Структура для базы знаний

Поле	Значение	Тип
1	список фактов	вектор фактов
2	список правил	вектор правил базы знаний

Таблица 30 – Структура цели

Поле	Значение	Тип
1	тип подцелей (И-подцели либо ИЛИ-подцели)	перечисление типов подцелей
2	список подцелей	вектор подцелей
3	предикат	предикат
4	исходная (родительская) цель (надцель)	дескриптор цели
5	имя отношения подобия	строка
6	аналогичная цель	дескриптор цели
7	унификатор (список пар унифицируемых аргументов)	вектор пар аргументов
8	таблица вычисленных истинных интерпретаций	вектор связок (кортежей предиката)

Библиотека БГУИР

Таблица 31 – Структура задачи и её решения

Поле	Значение	Тип
1	база знаний	база знаний
2	исходная цель задачи	цель
3	список решаемых целей	вектор дескрипторов целей

Таблица 32 – Структура пары аргументов

Поле	Значение	Тип
1	имя первого аргумента	строка
2	имя первого аргумента	строка

Дескриптор объекта позволяет найти этот объект.

Пусть имеется база знаний (формат базы описан на с. 56).

$s(h,a).$

$s(f,b).$

$s(g,d).$

$s(L,P).$

$s(N,Q).$

$s(R,T).$

$m(h,d).$

$m(f,b).$

$m(g,a).$

$m(R,T).$

$m(T,R).$

$P(a,d).$

$K(b,a).$

$O(a,a).$

$O(b,b).$

$Q(b,c).$

$Q(b,d).$

$N(f,g).$

$L(h,f).$

$L(h,g).$

$T(X,Y)\text{<-}P(X,Z);Q(Z,Y).$

$T(Y,Y)\text{<-}R(Y,Y).$

$P(X,Y)\text{<-}K(Y,X);O(X,X).$

Пусть есть цель $R(V,W)$.

Рассмотрим протокол вывода этой цели.

Начало протокола: предполагаем $\neg R(V,W)$.

Операция унификации не даёт результатов для цели $\neg R(V,W)$.

Операция построения аналогичных предположений на основании $s(R,T)\wedge m(R,T)$ строит следующие предположения: $\neg R(V,W)\wedge\neg T(V1,W1)$.

Операция резолюции для этих предположений на основании $s(L,P)\wedge s(N,Q)\wedge m(T,R)$ и правил $T(X,Y)\text{<-}P(X,Z);Q(Z,Y)$, и $T(Y,Y)\text{<-}R(Y,Y)$ даёт следующие резольвенты:

$\neg R(V1,V1)\vee\neg T(V,V)\vee\neg m(V,V1)$

$\neg P(V1,U)\vee\neg Q(U,W1)\vee\neg L(V,U1)\vee\neg N(U1,W)\vee\neg s(V,V1)\vee\neg s(W,W1)\vee\neg s(U1,U)$

Библиотека БГУИР

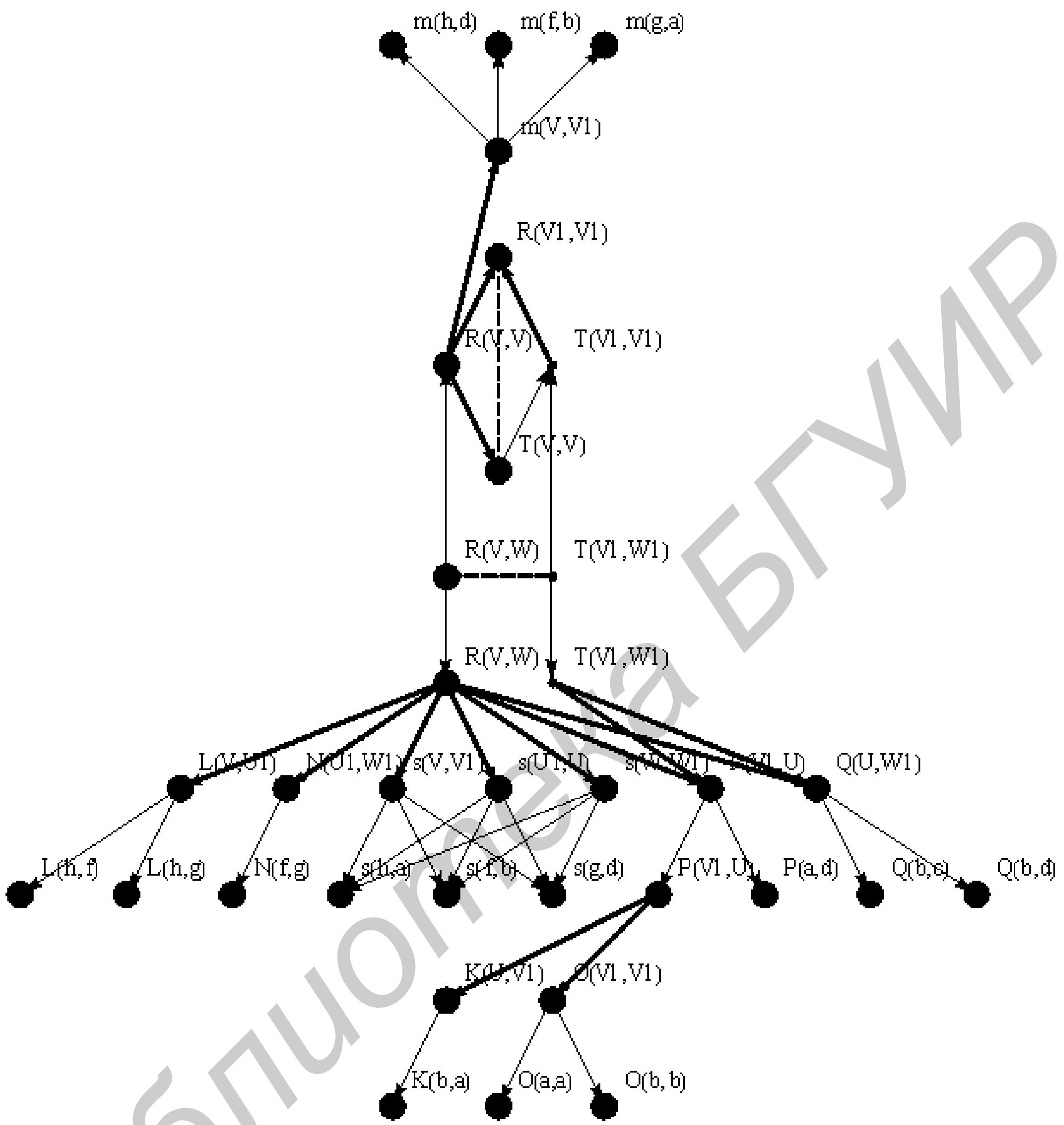


Рисунок 3 – Граф обратного логического вывода по аналогии для рассматриваемого примера базы знаний

Полужирным показаны связи между целью и и-подцелью; связи между целью и или-подцелью показаны тонкой линией; штриховой линией показаны подобные цели; основные цели дерева вывода показаны большими кружками; вспомогательные цели – маленькими. Исходная цель $R(V,W)$ соответствует корню задающего граф дерева – большой кружок в шестом ярусе слева.

Библиотека БГУИР

Операция унификации для этих резолюций с фактами базы знаний даёт соответственно следующие результаты:

$\neg R(V,V)\vee\neg T(V1,V1)\vee\neg m(h,d)$

$\neg R(V,V)\vee\neg T(V1,V1)\vee\neg m(f,b)$

$\neg R(V,V)\vee\neg T(V1,V1)\vee\neg m(g,a)$

– результат унификации дизъюнктов формулы $\neg R(V1,V1)\vee\neg T(V,V)\vee\neg m(V,V1)$ и фактов $m(h,d)$ $m(f,b)$ и $m(g,a)$

$\neg P(V,U1)\vee\neg Q(b,c)\vee\neg L(h,g)\vee\neg N(f,g)\vee\neg s(h,a)\vee\neg s(f,b)\vee\neg s(g,d)$

$\neg P(V,U1)\vee\neg Q(b,d)\vee\neg L(h,g)\vee\neg N(f,g)\vee\neg s(h,a)\vee\neg s(f,b)\vee\neg s(g,d)$

$\neg P(V,U1)\vee\neg Q(b,c)\vee\neg L(h,f)\vee\neg N(f,g)\vee\neg s(h,a)\vee\neg s(f,b)\vee\neg s(g,d)$

$\neg P(V,U1)\vee\neg Q(b,d)\vee\neg L(h,f)\vee\neg N(f,g)\vee\neg s(h,a)\vee\neg s(f,b)\vee\neg s(g,d)$

$\neg P(a,d)\vee\neg Q(b,c)\vee\neg L(h,g)\vee\neg N(f,g)\vee\neg s(h,a)\vee\neg s(f,b)\vee\neg s(g,d)$

$\neg P(a,d)\vee\neg Q(b,d)\vee\neg L(h,g)\vee\neg N(f,g)\vee\neg s(h,a)\vee\neg s(f,b)\vee\neg s(g,d)$

$\neg P(a,d)\vee\neg Q(b,c)\vee\neg L(h,f)\vee\neg N(f,g)\vee\neg s(h,a)\vee\neg s(f,b)\vee\neg s(g,d)$

$\neg P(a,d)\vee\neg Q(b,d)\vee\neg L(h,f)\vee\neg N(f,g)\vee\neg s(h,a)\vee\neg s(f,b)\vee\neg s(g,d)$

– аналогично

Операция резолюции для этих предположений (с четвёртого по седьмое) на основании правила $P(X,Y)$<-$K(Y,X);O(X,X)$ даёт следующие резольвенты вида:

$\neg K(U1,V)\vee\neg O(V,V)\vee\neg L(h,g)\vee\neg N(f,g)\vee\neg s(h,a)\vee\neg s(f,b)\vee\neg s(g,d)$ – и т. д.

Результатами операции унификации для них являются:

$\neg K(b,a)\vee\neg O(a,a)\vee\neg Q(b,c)\vee\neg L(h,g)\vee\neg N(f,g)\vee\neg s(h,a)\vee\neg s(f,b)\vee\neg s(g,d)$

$\neg K(b,a)\vee\neg O(b,b)\vee\neg Q(b,c)\vee\neg L(h,g)\vee\neg N(f,g)\vee\neg s(h,a)\vee\neg s(f,b)\vee\neg s(g,d)$

– и т. д.

Резолюция последних результатов с фактами базы знаний даёт ложь ($\perp$).

Конец протокола.

Операция резолюции для последнего результата даёт значение ложь ($\perp$).

Таблица 33 – Структура исходной цели $R(V,W)$

Поле	Значение
1	ИЛИ
2	$\{\}$
3	$R(V,W)$
4	$R(V,W)$
5	-
6	-
7	$\{(V,V),(W,W)\}$
8	$\{\}$

Таблица 34 – Структура цели $T(V1,W1)$

Поле	Значение
1	ИЛИ
2	$\{T(V1,V1),T(V1,W1)\}$
3	$T(V1,W1)$
4	$R(V,W)$
5	s,m
6	$R(V,W)$
7	$\{(V1,V1),(W1,W1)\}$
8	$\{\}$

Библиотека БГУИР

Таблица 35 – Структура цели $T(V1,V1)$

Поле	Значение
1	И
2	$\{R(V1,V1)\}$
3	$T(V1,V1)$
4	$T(V1,W1)$
5	m
6	$R(V,V)$
7	$\{(V1,V1),(W1,V1)\}$
8	{}

Таблица 36 – Структура цели $T(V1,W1)$

Поле	Значение
1	И
2	$\{P(V1,U),Q(U,W1)\}$
3	$T(V1,W1)$
4	$T(V1,W1)$
5	s
6	$R(V,W)$
7	$\{(V1,V1),(W1,W1),(U,U)\}$
8	{}

Таблица 37 – Структура цели $R(V,V)$

Поле	Значение
1	И
2	$\{T(V,V),R(V1,V1),m(V,V1)\}$
3	$R(V,V)$
4	$R(V,W)$
5	-
6	-
7	$\{(V,V),(W,V),(V1,V1)\}$
8	{}

Таблица 38 – Структура цели $R(V,W)$

Поле	Значение
1	И
2	$\{P(V1,U),Q(U,W1),L(V,U1),N(U1,W),s(V,V1),s(U1,U),s(W,W1)\}$
3	$R(V,W)$
4	$R(V,W)$
5	-
6	-
7	$\{(V,V),(W,W),(U1,U1)\}$
8	{}

Библиотека БГУИР

Таблица 39 – Структура цели $P(V1,U)$

Поле	Значение
1	ИЛИ
2	$\{P(V1,U),P(a,d)\}$
3	$P(V1,U)$
4	$R(V,W)$
5	s
6	$L(V,U1)$
7	$\{(V,V),(W,W),(U1,U1),(V1,V1),(W1,W1),(U,U)\}$
8	$\{(a,d)\}$

Таблица 40 – Структура цели $Q(U,W1)$

Поле	Значение
1	ИЛИ
2	$\{Q(b,c),Q(b,d)\}$
3	$Q(U,W1)$
4	$R(V,W)$
5	s
6	$N(U1,W)$
7	$\{(V,V),(W,W),(U1,U1),(V1,V1),(W1,W1),(U,U)\}$
8	$\{(b,c),(b,d)\}$

Таблица 41 – Структура цели $s(V,V1)$

Поле	Значение
1	ИЛИ
2	$\{s(h,a),s(f,b),s(g,d),s(L,P),s(N,Q),s(R,T)\}$
3	$s(V,V1)$
4	$R(V,W)$
5	s
6	$s(V,V1)$
7	$\{(V,V),(W,W),(U1,U1),(V1,V1),(W1,W1),(U,U)\}$
8	$\{(h,a),(f,b),(g,d),(L,P),(N,Q),(R,T)\}$

Библиотека БГУИР

Таблица 42 – Структура цели $s(W,W1)$

Поле	Значение
1	ИЛИ
2	$\{s(h,a),s(f,b),s(g,d),s(L,P),s(N,Q),s(R,T)\}$
3	$s(W,W1)$
4	$R(V,W)$
5	s
6	$s(W,W1)$
7	$\{(V,V),(W,W),(U1,U1),(V1,V1),(W1,W1),(U,U)\}$
8	$\{(h,a),(f,b),(g,d),(L,P),(N,Q),(R,T)\}$

Таблица 43 – Структура цели $s(U1,U)$

Поле	Значение
1	ИЛИ
2	$\{s(h,a),s(f,b),s(g,d),s(L,P),s(N,Q),s(R,T)\}$
3	$s(U1,U)$
4	$R(V,W)$
5	s
6	$s(U1,U)$
7	$\{(V,V),(W,W),(U1,U1),(V1,V1),(W1,W1),(U,U)\}$
8	$\{(h,a),(f,b),(g,d),(L,P),(N,Q),(R,T)\}$

Таблица 44 – Структура цели $L(V,U1)$

Поле	Значение
1	ИЛИ
2	$\{L(h,f),L(h,g)\}$
3	$L(V,U1)$
4	$R(V,W)$
5	-
6	-
7	$\{(V,V),(W,W),(U1,U1),(V1,V1),(W1,W1),(U,U)\}$
8	$\{(h,f),(h,g)\}$

Библиотека БГУИР

Таблица 45 – Структура цели $N(U1,W)$

Поле	Значение
1	ИЛИ
2	$\{N(f,g)\}$
3	$N(U1,W)$
4	$R(V,W)$
5	-
6	-
7	$\{(V,V),(W,W),(U1,U1),(V1,V1),(W1,W1),(U,U)\}$
8	$\{(f,g)\}$

Таблица 46 – Структура цели $P(V1,U)$

Поле	Значение
1	И
2	$\{K(U,V1),O(V1,V1)\}$
3	$P(V1,U)$
4	$P(V1,U)$
5	-
6	-
7	$\{(V1,V1),(U,U)\}$
8	$\{\}$

Таблица 47 – Структура цели $K(U,V1)$

Поле	Значение
1	ИЛИ
2	$\{K(b,a)\}$
3	$K(U,V1)$
4	$P(V1,U)$
5	-
6	-
7	$\{(V1,V1),(U,U)\}$
8	$\{(b,a)\}$

Таблица 48 – Структура цели $O(V1,V1)$

Поле	Значение
1	ИЛИ
2	$\{O(a,a),O(b,b)\}$
3	$O(V1,V1)$
4	$P(V1,U)$
5	-
6	-
7	$\{(V1,V1),(U,U)\}$
8	$\{(a,a),(b,b)\}$

Вычисление результатов.

В результате операций соединения и проекции, а затем – объединения, получим результат для целей $P(V1,U)$, являющихся и-подцелью и или-подцелью.

Библиотека БГУИР

Таблица 49 – Результат для цели $P(V1,U)$

Поле	Значение
1	И
2	$\{K(U,V1),O(V1,V1)\}$
3	$P(V1,U)$
4	$P(V1,U)$
5	-
6	-
7	$\{(V1,V1),(U,U)\}$
8	$\{(a,b)\}$

Таблица 50 – Результат для цели $P(V1,U)$

Поле	Значение
1	ИЛИ
2	$\{P(V1,U),P(a,d)\}$
3	$P(V1,U)$
4	$R(V,W)$
5	s
6	$L(V,U1)$
7	$\{(V,V),(W,W),(U1,U1),(V1,V1),(W1,W1),(U,U)\}$
8	$\{(a,b),(a,d)\}$

В результате операции соединения получим результат для цели $R(V,W)$.

Таблица 51 – Результат для цели $R(V,W)$

Поле	Значение
1	И
2	$\{P(V1,U),Q(U,W1),L(V,U1),N(U1,W),s(V,V1),s(U1,U),s(W,W1)\}$
3	$R(V,W)$
4	$R(V,W)$
5	-
6	-
7	$\{(V,V),(W,W),(U1,U1)\}$
8	$\{(h,g)\}$

Для исходной цели $R(V,W)$ получим результат операции объединения.

Таблица 52 – Результат для цели $R(V,W)$

Поле	Значение
1	ИЛИ
2	$\{\}$
3	$R(V,W)$
4	$R(V,W)$
5	-
6	-
7	$\{(V,V),(W,W)\}$
8	$\{(h,g)\}$

Ответ: $R(h,g)$.

Библиотека БГУИР

Лабораторная работа №1

Тема: *Вывод по аналогии.*

Цель: *Ознакомиться и получить навыки реализации механизмов вывода по аналогии.*

Задание:

Реализовать программу, реализующую механизм обратного логического вывода по аналогии в базе знаний. Выбрать предметную область и разработать базу знаний, содержательно проинтерпретированную в рамках выбранной предметной области. На примере разработанной базы знаний продемонстрировать осуществление вывода по аналогии.

Формат базы знаний:

<база знаний>::= <список фактов>[<список правил>]

<список фактов>::= <факт>[{<факт>}]

<список правил>::= <правило>[{<правило>}]

<факт>::= <предикатный факт>|<связка отношения подобия>

<предикатный факт>::= <имя предиката>([<список констант>]).

<связка отношения подобия>::= <имя отношения подобия><пара подобных имён>.

<пара подобных имён>::= <пара предикатных имён>|<пара константных имён>

<пара предикатных имён>::= (<имя предиката>,<имя предиката>)

<пара константных имён>::= (<имя константы>,<имя константы>)

<правило>::= <предикатный терм><-<список предикатных термов>.

<список констант>::= <имя константы>[{,<имя константы>}]

<список предикатных термов>::= <предикатный терм>[{;<предикатный терм>}]

<предикатный терм>::= <имя предиката>([<список параметров>])

<список параметров>::= <имя параметра>[{,<имя параметра>}]

<имя параметра>::= <имя константы>|<имя переменной>

<имя предиката>::= <имя прописными буквами>

<имя переменной>::= <имя прописными буквами>

<имя константы>::= <имя строчными буквами>

<имя отношения подобия>::= <имя строчными буквами>

Библиотека БГУИР

<имя строчными буквами>::=<строчная буква>[{<строчная буква>}]

<имя прописными буквами>::=<прописная буква>[{<прописная буква>}]

<прописная буква>::=A|...|Z

<строчная буква>::=a|...|z

Формат цели:

<цель>::= <список целевых термов>

<список целевых термов>::= <целевой терм>[{;<целевой терм>}]

<целевой терм>::= <имя предиката>([<список параметров цели>])

<список параметров цели>::= <имя целевого параметра>[{,<имя целевого параметра>}]

<имя целевого параметра>::= ?|<имя параметра>

График выполнения задания:

1 Ознакомление с заданием; продумывание примера программы (базы знаний) (1 ч).

В качестве основы аналогии рекомендуется использовать общность свойств бинарных отношений: рефлексивность, симметричность, транзитивность и т. п. Пример: число 0 подобно пустому множеству, а число 2 – множеству 2-х логических значений. Понятие «больше» подобно понятию «подмножество». Любое натуральное число больше числа 0. Число 2 – натуральное. Заключение: пустое множество есть подмножество множества 2-х логических значений.

Требуемый результат: описание постановки задачи; тестовый пример программы.

2 Проектирование структур данных (2 ч).

Спроектировать (внутренние) структуры данных для представления и хранения фактов и правил базы знаний, задач, целей и результатов графа вывода, см. таблицы 27–52. Структуры данных должны содержать соответствующую необходимую информацию.

Требуемый результат: описание структур данных на языке реализации.

3 Разработка структуры основного алгоритма порядка выполнения задач (2 ч). Структура основного алгоритма должна включать информацию о порядке выполнения следующих этапов: обработка и трансляция команд и запросов пользователя на ввод данных и решение задач; загрузка и трансляция базы знаний

Библиотека БГУИР

во внутреннее представление; вывод результатов; цикл формирования графа вывода, включающий: выбор и-подцели, построение и проверку на неповторяемость целей в ярусе или-подцелей – в результате унификации выбранной цели и её аналогов с правилами и фактами базы знаний – и ярусе и-подцелей – в результате применения правил резолюции и вывода по аналогии, основанном на правиле резолюции, к унифицированным целям; цикл формирования таблиц результатов в графе вывода, включающий: поярусное, начиная со сформированных последними целей, применение реляционных операций проекции, дублирования столбцов, подстановки схемы, соединения и объединения отношений.

Требуемый результат: схема алгоритма, программа на языке реализации, включающая объявления основных процедур или функций, их интерфейсы и структуру алгоритма.

4 Разработка транслятора исходного текста модели во внутренние структуры данных (3 ч).

Используя приведённую выше грамматику (с. 56–57) и средства автоматизированного построения трансляторов, запрограммировать трансляцию исходной базы знаний в разработанные структуры данных.

Требуемый результат: разработанный транслятор.

5 Реализация алгоритма унификации (2 ч), см. с. 38, 39.

Требуемый результат: схема алгоритма, программа на языке реализации.

6 Реализация алгоритмов правил вывода (2 ч), см. с. 39–41 и 47.

Требуемый результат: схема алгоритма, программа на языке реализации.

7 Реализация алгоритмов объединения, соединения и проекции отношений (2 ч), см. с. 21–25.

Требуемый результат: схемы алгоритмов, программы на языке реализации.

8 Отладка реализованных алгоритмов, системы логического вывода, подготовка и защита отчёта (4 ч).

Тестирование проводить, постепенно добавляя и удаляя факты и правила из базы знаний. Проверить корректность работы программы, когда разные правила вывода применяются в различных последовательностях. Протестировать

Библиотека БГУИР

вывод на правилах, которые содержат константы и одинаковые переменные на разных позициях.

Требуемый результат: отчёт, включающий результаты по всем предыдущим этапам и протокол выполнения примера программы.

Допускается разделение исполнения этапов 4–7 в бригаде между исполнителями.

Нечёткая логика

Нечёткая логика [2, с. 254, 603; 15, с. 30 – 36] оперирует с континуальным (несчётным) множеством значений истинности, и подавляющее множество многозначных логик могут иметь гомоморфное вложение в нечёткую логику.

Нечёткие множества

Нечёткое множество [2, с. 246; 15, с. 39 – 47] определяется так:

$$\left(\mathcal{M} \in [0,1]^{\mathfrak{S}}\right),$$

где $[0,1]$ является отрезком на множестве от числа ноль до числа один, элементы которого являются значениями степени нечёткой принадлежности, а $\mathfrak{S}$ – произвольное множество.

Для нечётких множеств определены следующие отношения (нечёткой принадлежности ϵ, нечёткого подмножества) и операции (нечёткого объединения, нечёткого пересечения, нечёткой разности, нечёткой симметрической разности, нечёткого дополнения).

$$\left(\left(\chi \epsilon \mathcal{A}\right) \vee \left(\neg\left(\chi \epsilon \mathcal{A}\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(\chi \epsilon \mathcal{A}\right) \sim \left(\mathcal{A}\left(\chi\right) > 0\right)\right)$$

$$\left(\left(\mathcal{A} \subseteqq \mathcal{B}\right) \sim \left(\forall \chi \left(\mathcal{A}\left(\chi\right) \leq \mathcal{B}\left(\chi\right)\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(\left(\mathcal{A} \Cap \mathcal{B}\right)\left(\chi\right)\right) = \min\left(\left\{\mathcal{A}\left(\chi\right), \mathcal{B}\left(\chi\right)\right\}\right)\right)$$

$$\left(\left(\left(\mathcal{A} \Cup \mathcal{B}\right)\left(\chi\right)\right) = \max\left(\left\{\mathcal{A}\left(\chi\right), \mathcal{B}\left(\chi\right)\right\}\right)\right)$$

$$\left(\left(\left(\mathcal{A} // \mathcal{B}\right)\left(\chi\right)\right) = \max\left(\left\{0, \mathcal{A}\left(\chi\right) - \mathcal{B}\left(\chi\right)\right\}\right)\right)$$

$$\left(\left(\mathcal{A} \eqsim \mathcal{B}\right) = \left(\left(\mathcal{A} // \mathcal{B}\right) \Cup \left(\mathcal{B} // \mathcal{A}\right)\right)\right)$$

Библиотека БГУИР

$\left(\tilde{\mathcal{A}}(\chi)=\left(1-\mathcal{A}(\chi)\right)\right)$

Нечёткие отношения

Частным видом нечётких множеств являются нечёткие отношения [20, с. 36 – 38]. Среди них выделяют бинарные нечёткие отношения, для которых определены следующие свойства и операции.

Рефлексивность

$\left(\mathcal{A}(\chi,\chi)=1\right)$

Арефлексивность

$\left(\mathcal{A}(\chi,\chi)=0\right)$

Симметричность

$\left(\mathcal{A}(\chi,\lambda)=\mathcal{A}(\lambda,\chi)\right)$

Антисимметричность

$\left(\left(\mathcal{A}(\chi,\lambda)=\mathcal{A}(\lambda,\chi)\right)\rightarrow\left(\left(\neg(\lambda=\chi)\right)\rightarrow\left(\mathcal{A}(\lambda,\chi)=0\right)\right)\right)$

Асимметричность

$\left(\left(\mathcal{A}(\chi,\lambda)=\mathcal{A}(\lambda,\chi)\right)\rightarrow\left(\mathcal{A}(\lambda,\chi)=0\right)\right)$

Строгая асимметричность

$\left(\min\left(\left\{\mathcal{A}(\chi,\lambda),\mathcal{A}(\lambda,\chi)\right\}\right)=0\right)$

Полнота

$\left(\max\left(\left\{\mathcal{A}(\chi,\lambda),\mathcal{A}(\lambda,\chi)\right\}\right)=1\right)$

Транзитивность

$\left(\mathcal{A}(\chi,\lambda)\leq\max\left(\left\{\min\left(\left\{\mathcal{A}(\chi,\gamma),\mathcal{A}(\gamma,\lambda)\right\}\right)|\gamma\right\}\right)\right)$

Композиция

$\left(\mathcal{A}(\chi,\lambda)=\max\left(\left\{\min\left(\left\{\mathcal{B}(\chi,\gamma),\mathcal{C}(\gamma,\lambda)\right\}\right)|\gamma\right\}\right)\right)$

Предикаты. Треугольные нормы

Нечёткий предикат [21, с. 161] – это нечёткое множество, значения которого интерпретируются как значения истинности. Над нечёткими предикатами определены нечёткие операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и

Библиотека БГУИР

другие. В зависимости от предметной области эти операции могут отличаться, т. е. могут существовать разные виды нечёткой конъюнкции, нечёткой дизъюнкции, нечёткой импликации. Эти виды определяются зависимостью выражаемых предикатами свойств и явлений: например, явления могут быть причинно-зависимыми, независимыми и альтернативными. Однако, несмотря на различие зависимостей, нечёткие логические операции сохраняют некоторые общие свойства для любой предметной области: так, например, операция нечёткой конъюнкции удовлетворяет свойствам операции, которую называют треугольной нормой или t-нормой. Эти свойства следующие:

$$\left(\left(\mathcal{A}\,\tilde{\wedge}\,0\right)=0\right)$$

$$\left(\left(\mathcal{A}\,\tilde{\wedge}\,1\right)=\mathcal{A}\right)$$

$$\left(\left(\mathcal{A}\,\tilde{\wedge}\,\mathcal{B}\right)=\left(\mathcal{B}\,\tilde{\wedge}\,\mathcal{A}\right)\right)$$

$$\left(\left(\left(\mathcal{A}\,\tilde{\wedge}\,\mathcal{B}\right)\tilde{\wedge}\,\mathcal{C}\right)=\left(\mathcal{A}\,\tilde{\wedge}\left(\mathcal{B}\,\tilde{\wedge}\,\mathcal{C}\right)\right)\right)$$

$$\left(\left(\mathcal{B}\le\mathcal{C}\right)\rightarrow\left(\left(\mathcal{A}\,\tilde{\wedge}\,\mathcal{B}\right)\le\left(\mathcal{A}\,\tilde{\wedge}\,\mathcal{C}\right)\right)\right)$$

Когда задана операция нечёткой конъюнкции (треугольная норма), тогда операция нечёткой дизъюнкции (s-норма) может быть выражена через неё с помощью операции нечёткого отрицания

$$\left(\left(\simeq\left(\mathcal{A}(\chi)\,\tilde{\wedge}\,\mathcal{B}(\chi)\right)\right)=\left(\left(\simeq\mathcal{A}(\chi)\right)\underset{\sim}{\vee}\left(\simeq\mathcal{B}(\chi)\right)\right)\right)$$

Примерами операций нечёткой конъюнкции и нечёткой дизъюнкции являются операции нечёткого пересечения и нечёткого объединения множеств соответственно:

$$\left(\left(\mathcal{A}(\chi)\,\tilde{\wedge}\,\mathcal{B}(\chi)\right)=\min\left(\left\{\mathcal{A}(\chi),\mathcal{B}(\chi)\right\}\right)\right)$$

$$\left(\left(\mathcal{A}(\chi)\underset{\sim}{\vee}\mathcal{B}(\chi)\right)=\max\left(\left\{\mathcal{A}(\chi),\mathcal{B}(\chi)\right\}\right)\right)$$

Меры возможности и необходимости

Для множеств событий, явлений, проявляемых свойств можно ввести меры необходимости и возможности [20, с. 12–22] проявления этих свойств. Для любых множеств событий мера необходимости N и мера возможности P удовлетворяют следующим соотношениям соответственно:

Библиотека БГУИР

$$\left(\left(\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}\right) \vDash \left(N\left(\mathfrak{A}\right) \leq N\left(\mathfrak{B}\right)\right)\right)$$
$$\left(\left(\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}\right) \vDash \left(P\left(\mathfrak{A}\right) \leq P\left(\mathfrak{B}\right)\right)\right)$$
$$N\left(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}\right) = \min\left(\left\{N\left(\mathfrak{A}\right), N\left(\mathfrak{B}\right)\right\}\right)$$
$$P\left(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}\right) \leq \min\left(\left\{P\left(\mathfrak{A}\right), P\left(\mathfrak{B}\right)\right\}\right)$$
$$N\left(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}\right) \geq \max\left(\left\{N\left(\mathfrak{A}\right), N\left(\mathfrak{B}\right)\right\}\right)$$
$$P\left(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}\right) = \max\left(\left\{P\left(\mathfrak{A}\right), P\left(\mathfrak{B}\right)\right\}\right)$$

Прямой нечёткий логический вывод

Задача прямого вывода [15, с. 47–59] подразумевает известность некоторой пары нечётких предикатов, один из которых рассматривается как посылка, а второй – как правило, обычно первый предикат является унарным, а второй – бинарным. Тогда задача прямого вывода сводится к нахождению композиции межу этими двумя нечёткими предикатами. Результат (следствие) также является нечётким предикатом

$$\left(\mathcal{B}\left(\gamma\right) = \mathcal{A}\left(\chi\right) \tilde{\circ} \mathcal{R}\left(\chi, \gamma\right)\right)$$
$$\mathcal{B}\left(\gamma\right) = ?$$

В зависимости от выбранного правила и вида операции композиции результат может соответствовать мере необходимости, либо мере возможности нечёткого логического следствия, либо некоторой другой, например, усреднённой мере. Это вызвано тем, что правило обычно нельзя построить однозначным образом для зависимостей причин и следствий по известным фактам. Правило обычно строится как некоторая импликация, которая выражает зависимость между наблюдаемыми причинами и следствиями. В силу вида нечётких операций над предикатами таких правил может быть несколько, поэтому такая неоднозначность повышает степень нечёткости результатов нечёткого логического вывода, тогда для представления более полного заключения при прямом нечётком логическом выводе необходимо использовать нечёткие предикаты и множества более высоких порядков. В случае если рассматривается правило импликативного вида, исходя из целей получения меры возможности для заключения, можно рассчитать предикат, выражающий правило на основании известных причины и следствия следующим образом:

$$\left(\mathcal{A}\left(\chi\right) \tilde{\rightarrow} \mathcal{B}\left(\gamma\right) = \sup\left(\left\{\delta \middle| \left(\left(\left(\mathcal{A}\left(\chi\right) \tilde{\wedge} \delta\right) \leq \mathcal{B}\left(\gamma\right)\right) \wedge \left(\delta \leq 1\right)\right)\right\}\right)\right)$$

Затем уже это правило может быть использовано для получения заключения, когда в качестве причины выбирается тот же или другой нечёткий предикат:

$$\left(\mathcal{B}(\gamma)=\sup\left(\left\{\mathcal{A}(\chi)\tilde{\wedge}\mathcal{R}(\chi,\gamma)\middle|\chi\right\}\right)\right)$$

Рассмотрим пример прямого нечёткого логического вывода.

Пусть даны два нечётких предиката:

$$A=\{\langle x1,0.0\rangle,\langle x2,0.1\rangle,\langle x3,0.3\rangle,\langle x4,1.0\rangle\}$$
$$B=\{\langle y1,1.0\rangle,\langle y2,0.8\rangle,\langle y3,0.2\rangle,\langle y4,0.0\rangle\}$$

Тогда импликация, соответствующая мере возможности, будет задавать следующий предикат:

$$A(x)\tilde{\to}B(y)=\begin{matrix}\{\langle\langle x1,y1\rangle,1.0\rangle,\langle\langle x1,y2\rangle,1.0\rangle,\langle\langle x1,y3\rangle,1.0\rangle,\langle\langle x1,y4\rangle,1.0\rangle\\ \langle\langle x2,y1\rangle,1.0\rangle,\langle\langle x2,y2\rangle,1.0\rangle,\langle\langle x2,y3\rangle,1.0\rangle,\langle\langle x2,y4\rangle,0.0\rangle\\ \langle\langle x3,y1\rangle,1.0\rangle,\langle\langle x3,y2\rangle,1.0\rangle,\langle\langle x3,y3\rangle,0.2\rangle,\langle\langle x3,y4\rangle,0.0\rangle\\ \langle\langle x4,y1\rangle,1.0\rangle,\langle\langle x4,y2\rangle,0.8\rangle,\langle\langle x4,y3\rangle,0.2\rangle,\langle\langle x4,y4\rangle,0.0\rangle\}\end{matrix},$$

что соответствует матрице:

$$\begin{pmatrix}1.0&1.0&1.0&1.0\\1.0&1.0&1.0&0.0\\1.0&1.0&0.2&0.0\\1.0&0.8&0.0&0.0\end{pmatrix}.$$

Пусть есть посылка:

$$C=\{\langle x1,0.1\rangle,\langle x2,1.0\rangle,\langle x3,0.3\rangle,\langle x4,0.0\rangle\}$$

Тогда результатом прямого вывода будет

$$\{\langle y1,1.0\rangle,\langle y2,1.0\rangle,\langle y3,1.0\rangle,\langle y4,0.1\rangle\},$$

так как

$$\begin{pmatrix}0.1\\1.0\\0.3\\0.0\end{pmatrix}\tilde{\wedge}\begin{pmatrix}1.0&1.0&1.0&1.0\\1.0&1.0&1.0&0.0\\1.0&1.0&0.2&0.0\\1.0&0.8&0.0&0.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1&0.1&0.1&0.1\\1.0&1.0&1.0&0.0\\0.3&0.3&0.2&0.0\\0.0&0.0&0.0&0.0\end{pmatrix}.$$

Лабораторная работа №2

Тема: *Прямой нечёткий логический вывод.*

Цель: *Ознакомиться и получить навыки реализации методов прямого нечёткого логического вывода.*

Библиотека БГУИР

Вывод должен быть осуществлен в рамках базы знаний. База знаний состоит из фактов и правил. Фактами в базе знаний являются нечёткие множества. Например:

A = {(x1, 0.1), (x2, 0.3)}.

B = {(x1, 1), (x3, 0.3)}.

Правила задаются с помощью связки операции, сопоставленной треугольной норме:

A~>B.

t -нормами являются:

1) $\min(\gamma_1, \gamma_2)$ – (нечёткое) логическое произведение;
2) $\gamma_1 * \gamma_2$ – алгебраическое (числовое) произведение;
3) $\max(0, \gamma_1 + \gamma_2 \text{-} 1)$ – граничное произведение;
4) $\min\left(1, \lim\limits_{\gamma\to\infty}\left(\gamma_1 * \exp\left(\gamma * \ln\left(\gamma_2\right)\right) + \gamma_2 * \exp\left(\gamma * \ln\left(\gamma_1\right)\right)\right)\right)$ – драстическое произведение.

Прямой вывод в случае вычисления множества α' как оценки меры возможности по правилу α ~> β осуществляется согласно следующей формуле:

$$\forall\chi_2(\beta'(\chi_2) = \sup_{\chi_1}(\left(\sup_{(\gamma\in[0;\,1])\wedge(\alpha(\chi_1)\;\tau\;\gamma\le\beta(\chi_2))}(\gamma)\right)\tau\;\alpha'(\chi_1)))$$

Прямой вывод в случае вычисления множества α' как оценки меры необходимости по правилу α ~> β осуществляется согласно формуле

$$\forall\chi_2(\beta'(\chi_2) = \inf_{\chi_1}(\left(\inf_{(\gamma\in[0;\,1])\wedge(\beta(\chi_2)\le\alpha(\chi_1)\;\tau\;\gamma)}(\gamma)\right)\tau\;\alpha'(\chi_1)))$$

В качестве множеств α' для вывода по правилу α ~> β, заданному τ, должны использоваться все такие заданные и выведенные нечёткие множества, для которых возможен вывод нового множества β'.

Задание:

1 Реализовать систему прямого нечёткого логического вывода. Исходные данные и результаты должны быть сохранены в файле. Для расчёта меры возможности использовать (нечёткое) логическое произведение (импликация Гёделя). Предусмотреть преодоление зацикливания. Дополнительно: реализовать вычисление мер необходимости.

Библиотека БГУИР

2 Реализовать систему прямого нечёткого логического вывода. Исходные данные и результаты должны быть сохранены в файле. Для расчёта меры возможности использовать алгебраическое (числовое) произведение (импликация Гогена). Предусмотреть преодоление зацикливания. Дополнительно: реализовать вычисление мер необходимости.

3 Реализовать систему прямого нечёткого логического вывода. Исходные данные и результаты должны быть сохранены в файле. Для расчёта меры возможности использовать граничное произведение (импликация Лукасевича). Предусмотреть преодоление зацикливания. Дополнительно: реализовать вычисление мер необходимости.

4 Реализовать систему прямого нечёткого логического вывода. Исходные данные и результаты должны быть сохранены в файле. Для расчёта меры возможности использовать драстическое произведение. Предусмотреть преодоление зацикливания. Дополнительно: реализовать вычисление мер необходимости.

Формат базы знаний:

<база знаний>::= <список фактов>[<список правил>]

<список фактов>::= <факт>[{<факт>}]

<список правил>::= <правило>[{<правило>}]

<факт>::= <имя нечёткого множества>=<нечёткое множество>

<правило>::= <имя нечёткого множества>~><имя нечёткого множества>.

<нечёткое множества>::={[<список пар нечёткой принадлежности>]}

<список пар нечёткой принадлежности>::=

<пара нечёткой принадлежности>[{,<пара нечёткой принадлежности>}]

<пара нечёткой принадлежности>::=(<элемент>,<степень принадлежности>)

<элемент>::=<имя>[|<множество>]

<множество>::=<ориентированное множество>|<неориентированное множество>

<неориентированное множество>::={[<список элементов>]}

<ориентированное множество>::=(<элемент>,<список элементов>)

<список элементов>::=<элемент>[{,<элемент>}]

<имя нечёткого множества>::=<имя>

Библиотека БГУИР

<имя>::=<символ>[{<символ>}]

<символ>::=<буква>|<цифра>

<цифра>::=0|...|9

<буква>::=A|...|z

<степень принадлежности>::=<действительное число с 0 по 1>

<действительное число с 0 по 1>::=<единица>|<действительное число с 0 до 1>

<действительное число с 0 до 1>::=0[.[{<цифра>}]]

<единица>::=1[.[{0}]]

Контрольные вопросы

1 Если множества α и β являются нормальными, то возможен ли случай при каких-либо значениях α', когда результат не будет являться нормальным множеством?

2 Если множества α и β не являются нормальными, то возможен ли случай при каких-либо значениях α', когда результат будет являться нормальным множеством?

3 Какими значениями α', α и β можно гарантировать, что результат будет являться нормальным множеством?

Обратный нечёткий логический вывод

Задача обратного нечёткого логического вывода [15, с. 59 – 62] является обратной задачей к задаче прямого логического вывода. В качестве исходных данных здесь выступают два нечётких предиката – правило и заключение. Требуется найти множество посылок, которые могут при применении данного правила привести к указанному заключению. (Задача обратного нечёткого вывода сложнее задачи прямого нечёткого логического вывода и не всегда имеет решение.)

$$\left(\mathcal{B}(\gamma)=\mathcal{A}(\chi)\,\tilde{\circ}\,\mathcal{R}(\chi,\gamma)\right)$$
$$\mathcal{A}(\chi)=?$$

Искомые посылки могут быть найдены как нечёткий предикат (множество) первого порядка и выше, либо наиболее общие случаи для посылок могут быть заданы парами минимального и максимального значений для каждого аргумента посылки.

Рассмотрим пример обратного нечёткого логического вывода.

Библиотека БГУИР

Пусть дан нечёткий предикат, задающий множество следствий:

$B = \{\langle y1, 0.7\rangle, \langle y2, 0.3\rangle, \langle y3, 0.2\rangle\}$

и бинарный нечёткий предикат, задающий правило:

$$R(x) = \begin{array}{l}\{\langle\langle x1, y1\rangle, 0.7\rangle, \langle\langle x1, y2\rangle, 0.1\rangle, \langle\langle x1, y3\rangle, 0.2\rangle, \\ \langle\langle x2, y1\rangle, 0.7\rangle, \langle\langle x2, y2\rangle, 0.3\rangle, \langle\langle x2, y3\rangle, 0.1\rangle\}\end{array},$$

который может быть задан матрично:

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Эта задача описывается следующей системой:

$$\begin{cases} (0.7 \tilde{\wedge} C(x1)) \hat{\vee} (0.7 \tilde{\wedge} C(x2)) = 0.7 \\ (0.1 \tilde{\wedge} C(x1)) \hat{\vee} (0.3 \tilde{\wedge} C(x2)) = 0.3 \\ (0.2 \tilde{\wedge} C(x1)) \hat{\vee} (0.1 \tilde{\wedge} C(x2)) = 0.2 \end{cases}$$

Тогда результатом обратного вывода будет нечёткий предикат C такой, что $\langle C(x1), C(x2)\rangle \in ([0.7, 1.0] \times [0.0, 1.0]) \cup ([0.0, 1.0] \times [0.7, 1.0])$.

Лабораторная работа №3

Тема: *Обратный нечёткий логический вывод*.

Цель: *Ознакомиться и получить навыки реализации методов обратного нечёткого логического вывода.*

Метод решения систем уравнений нечётких множеств.

Пусть связь нечётких множеств χ и β выражена через нечёткое отношение α операцией τ.

$\beta = \alpha \; \tau \; \chi$.

β – множество заключений, χ – множество предпосылок. Например, в задаче диагностики заключения являются наблюдаемыми симптомами, а предпосылки – факторами, влияющими на эти симптомы.

Выраженную выше зависимость зададим системой уравнений вида

$$\begin{cases} (\alpha_{11} \tilde{\wedge} \chi_1) \hat{\vee} (\alpha_{12} \tilde{\wedge} \chi_2) \hat{\vee} \ldots \hat{\vee} (\alpha_{1n} \tilde{\wedge} \chi_n) = \beta_1 \\ (\alpha_{21} \tilde{\wedge} \chi_1) \hat{\vee} (\alpha_{22} \tilde{\wedge} \chi_2) \hat{\vee} \ldots \hat{\vee} (\alpha_{2n} \tilde{\wedge} \chi_n) = \beta_2 \\ \ldots \\ (\alpha_{m1} \tilde{\wedge} \chi_1) \hat{\vee} (\alpha_{m2} \tilde{\wedge} \chi_2) \hat{\vee} \ldots \hat{\vee} (\alpha_{mn} \tilde{\wedge} \chi_n) = \beta_m \end{cases}$$

Библиотека БГУИР

Здесь $\alpha \tilde{\wedge} \beta - \min(\alpha,\beta)$; а $\alpha \hat{\vee} \beta - \max(\alpha,\beta)$.

Задача обратного вывода методом решения систем уравнений нечётких множеств заключается в следующем: при заданных значениях α_{ij} и β_p найти множество всех возможных множеств пар значений верхней и нижней границ $\chi_q{}^u$ и$\chi_q{}^l$ для всех степеней принадлежностиχ_q множества χ.

Задание:

Разработать алгоритм и реализовать программу, обеспечивающую вычисление результата решения заданной системы.

Формат данных произвольный.

Литература

1 Латонин, Л. А. Математическая логика : учеб. пособие / Л. А. Латонин [и др.] ; под общ. ред. А. А. Столяра. – Минск : Выш. шк., 1991. – 269 с.

2 Тейз, А. Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию / А. Тейз [и др.] ; пер. с франц. – М. : Мир, 1990. – 432 с.

3 Вагин, В. Н. Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах / В. Н. Вагин [и др.] ; под ред. В. Н. Вагина, Д. А. Поспелова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 704 с.

4 Драгалин, А. Г. Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ / А. Г. Драгалин. – М. : Едиториал УРСС , 2003. – 544 с.

5 Кандрашина, Е. Ю. Представление знаний о времени и пространстве в интеллектуальных системах / Е. Ю. Кандрашина, Л. В. Литвинцева, Д. А. Поспелов ; под ред. Д. А. Поспелова. – М. : Наука, 1989. – 328с.

6 Кофман, А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман ; пер. с франц. В. Б. Кузьмина ; под ред. С. И. Травкина. – М. : Радио и связь,1982. – 432 с.

7 Аверкин, А. Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А. Н. Аверкин [и др.] ; под ред. Д. А. Поспелова. – М. : Наука, 1986. – 312 с.

8 Гаек, П. Автоматическое образование гипотез: математические основы общей теории / П. Гаек, Т. Гавранек ; пер. с англ. – М. : Наука, 1984.

Библиотека БГУИР

9 Кузнецов, О. П. Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Андельсон-Вельский ; 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.

10 Успенский В. А. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения / В. А. Успенский, А. Л. Семенов. – М. : Наука, 1987. – 288 с.

11 Расева Е. Математика метаматематики / Е. Расева, Р. Сикорский ; пер. с англ. – М. : Наука. 1972. – 591 с.

12 Научно-техническая информация. Сер. 2. Информационные процессы и системы. – 1996. – № 5–6: Спецвыпуск «Интеллектуальные системы автоматизированной поддержки научных исследований».

13 Мендельсон, Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон ; пер. с англ. – 3-е изд. – М. : Наука, 1984. – 320 с.

14 Чень, Ч. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем / Ч. Чень, Р. Ли ; пер. с англ. – М. : Наука, 1983. – 360 с.

15 Ито, О. Промышленные применения. // Прикладные нечеткие системы / О. Ито [и др.] ; под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно; пер. с япон. Ю. Н. Чернышова. – М. : Мир, 1993.

16 Кэррол, Л. История с узелками / Л. Кэррол. – М. : Мир, 1973.

17 Адаменко, А. Логическое программирование и Visual Prolog / А. Адаменко, А. Кучуков. – Спб. : БХВ-Петербург, 2003.

18 Горбатов, В. А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика / В. А. Горбатов. – М. : Наука., 2000.

19 Голенков, В. В. Представление и обработка знаний в графодинамических ассоциативных машинах : монография / В. В. Голенков [и др.] ; под ред. В. В. Голенкова. – Минск : БГУИР, 2001.

20 Дюбуа, Д. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике / Д. Дюбуа. – М. : Радио и связь, 1990.

21 Леоненков, А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH / А. В. Леоненков. – Спб. : БХВ-Петербург, 2005.

Библиотека БГУИР

Учебное издание

Голенков Владимир Васильевич
Ивашенко Валерьян Петрович
Колб Дмитрий Григорьевич
Уваров Константин Александрович

ЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ. ПРАКТИКУМ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Т. П. Андрейченко*
Корректор *А. В. Тюхай*
Компьютерная вёрстка и дизайн обложки *Ю. Ч. Клочкевич*

Подписано в печать 08.09.2011. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 4,3. Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 150 экз. Заказ 389.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
ЛИ №02330/0494371 от 16.03.2009. ЛП №02330/0494175 от 03.04.2009.

Библиотека БГУИР

220013, Минск, П. Бровки, 6

Библиотека БГУИР